Chapitre I : Rappels mathématiques (éléments de calcul vectoriel)

1. Scalaire

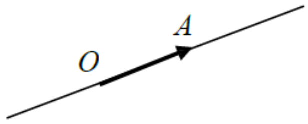
En algèbre linéaire un vrai scalaire est un nombre qui est indépendant de la base choisie, il peut être représenté soit par des nombres réels soit par des lettres grecques.

En physique, le scalaire est une quantité pouvant être décrite par un nombre et l'unité correspondante. Les quantités scalaires sont invariables par rapport aux rotations de coordonnées et aux transformations de système. Donc un scalaire est une quantité qui n'est associé à aucune direction où sens comme exemple: la masse m d'un objet, le temps t.

2. Vecteur

Un vecteur est un segment de droite OA sur lequel on a choisi une origine O et une extrémité A ; il est défini par :

- son origine ;
- sa direction ;
- son sens ;
- son module



2.1. Classification des vecteurs

Il existe plusieurs types de vecteurs :

- Vecteur libre : la direction, le sens et le module sont donnés mais la droite support et le point d'application (origine du vecteur) ne sont pas connues ;
- Vecteur glissant : le point d'application (origine du vecteur) n'est pas fixé;
- Vecteur lié : tous les éléments du vecteur sont déterminés;
- Vecteur unitaire : c'est un vecteur dont le module est égal à 1.

2.2. Comparaison entre vecteurs

- Vecteurs colinéaires : ils possèdent le même support;
- Vecteurs coplanaires : leurs supports se trouvent dans un même plan;
- Vecteurs équipollents (équivalents) : ils ont les mêmes grandeurs et les mêmes orientations, même s'ils n'ont pas le même point d'application;
- Vecteurs égaux : vecteurs équipollents de même sens;
- Vecteurs opposés : vecteurs équipollents de sens contraires ou opposés;

– Vecteurs identiques : vecteurs équipollents égaux de même origine.

– Un vecteur $\vec{u}$ est défini dans un repère cartésien orthonormé, dans R $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ par :

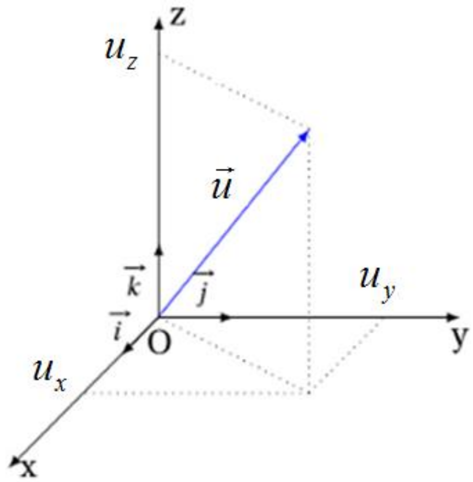
$$\vec{u} = u_x\vec{\imath} + u_y\vec{\jmath} + u_z\vec{k}$$

son module est un scalaire égal à $\|\vec{u}\| = u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$

$$u_x = u.\cos\theta_x\ ; u_y = u.\cos\theta_y ; u_z = u.\cos\theta_z$$

$\cos\theta_x, \cos\theta_y, \cos\theta_z$ sont les cosinus directeurs avec : $\cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y + \cos^2\theta_z = 1$

$\cos\theta_x\vec{\imath} + \cos\theta_y\vec{\jmath} + \cos\theta_z\vec{k}$ est un vecteur unitaire



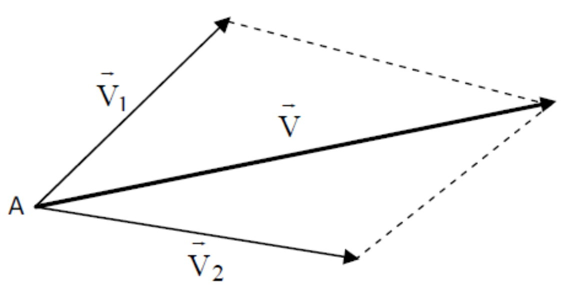
2.3. Opération sur les Vecteurs

2.3.1. Addition

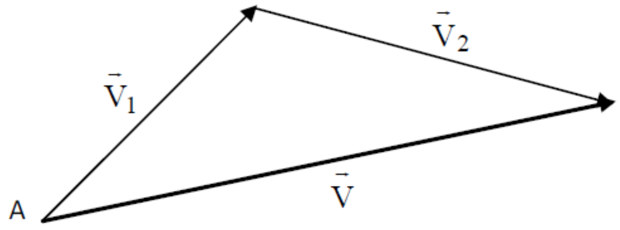
La somme de deux vecteurs $\vec{V_1}$, $\vec{V_2}$ s'effectue en transportant les origines des deux vecteurs en un seul point A afin de construire un parallélogramme dont les côtés sont : $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$.

Le vecteur $\vec{V}$ est défini par : $\vec{V} = \vec{V_1} + \vec{V_2}$

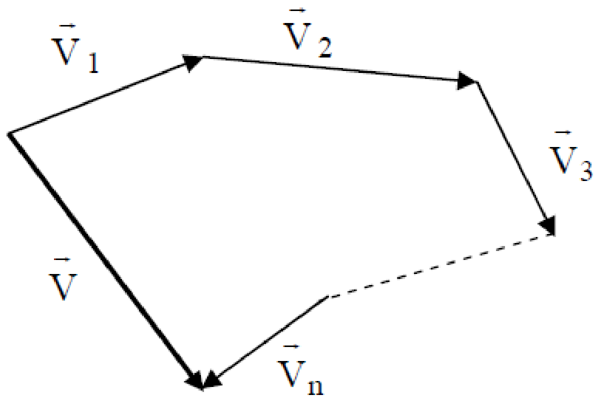
$$\vec{V} = (V_{1x} + V_{2x})\vec{\imath} + (V_{1y} + V_{2y})\vec{\jmath} + (V_{1z} + V_{2z})\vec{k}$$



Nous pourrons dessiner seulement la moitié du parallélogramme. Le vecteur résultant de l'addition de deux vecteurs peut être trouvé en disposant $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ bout à bout et en joignant ensuite l'origine de $\vec{V_1}$ à l'extrémité de $\vec{V_2}$.



L'addition de plusieurs vecteurs de fait en disposant tous les vecteurs bout à bout et en traçant le vecteur qui a comme origine, l'origine du premier vecteur, et comme extrémité, l'extrémité du dernier. Cette façon de procéder traduit graphiquement la règle du polygone



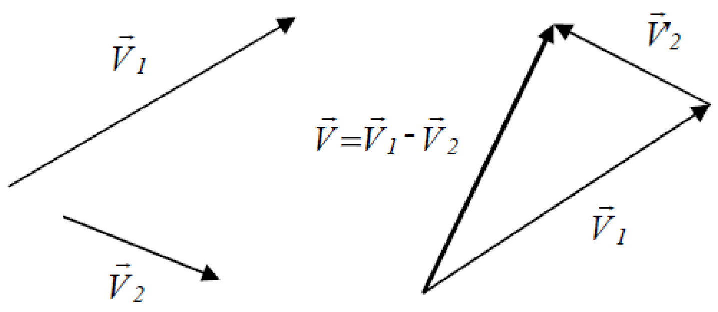
Propriétés de l'addition:

- Commutativité : $\overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_1}$
- Associativité : $\left(\overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2}\right) + \overrightarrow{V_3} = \overrightarrow{V_1} + \left(\overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_3}\right)$
- Distributivité par rapport à la somme vectorielle : $\lambda\left(\overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2}\right) = \lambda\overrightarrow{V_1} + \lambda\overrightarrow{V_2}$
- Distributivité par rapport à la somme scalaire : $\vec{V}(\lambda_1 + \lambda_2) = \lambda_1\vec{V} + \lambda_2\vec{V}$

2.3.2. Soustraction

La soustraction de deux vecteurs $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ est le vecteur $\vec{V}$ défini comme l'addition du vecteur $\overrightarrow{V_1}$ à un vecteur $\overrightarrow{V'_2}$ égal à l'opposé à $\overrightarrow{V_2}$.

$$\vec{V} = \overrightarrow{V_1} - \overrightarrow{V_2} = (V_{1x} - V_{2x})\vec{\imath} + \left(V_{1y} - V_{2y}\right)\vec{\jmath} + (V_{1z} - V_{2z})\vec{k}$$



2.3.3. Produit scalaire

On appelle produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}$ noté par $\overrightarrow{V_1} \cdot \overrightarrow{V_2}$ une loi de composition externe qui associe aux deux vecteurs un scalaire (nombre réel) tel que :

$$\forall\, \overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2} \in R^3 \text{ alors } \overrightarrow{V_1} \cdot \overrightarrow{V_2} \in R$$

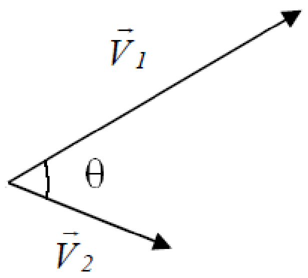
$$\overrightarrow{V_1} \cdot \overrightarrow{V_2} = \left\|\overrightarrow{V_1}\right\| . \left\|\overrightarrow{V_2}\right\| . cos\left(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}\right)$$

Le produit scalaire est nul si :

- Les deux vecteurs sont coplanaires
- L'un des vecteurs est nul

$$\overrightarrow{V_1} \cdot \overrightarrow{V_2} = \left\|\overrightarrow{V_1}\right\| . \left\|\overrightarrow{V_2}\right\| . cos\theta$$

$$\overrightarrow{V_1} \cdot \overrightarrow{V_2} = V_{1x}.V_{2x} + V_{1y}.V_{2y} + V_{1z}.V_{2z}$$



Propriétés du produit scalaire:

- Commutativité : $\overrightarrow{V_1} \cdot \overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{V_2} \cdot \overrightarrow{V_1}$
- Associativité par rapport à la multiplication par un scalaire:

$$\lambda\left(\overrightarrow{V_1} \cdot \overrightarrow{V_2}\right) = \left(\lambda\overrightarrow{V_1}\right) \cdot \overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{V_1} \cdot \left(\lambda\overrightarrow{V_2}\right)$$

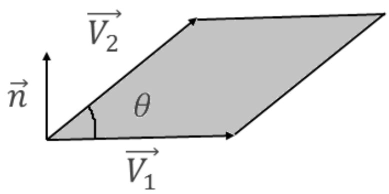
- Distributivité par rapport à la somme vectorielle : $\overrightarrow{V_1} \cdot \left(\overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_3}\right) = \overrightarrow{V_1} \cdot \overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_1} \cdot \overrightarrow{V_3}$
- Nul si et seulement si les deux vecteurs sont orthogonaux : $\overrightarrow{V_1} \perp \overrightarrow{V_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{V_1} \cdot \overrightarrow{V_2} = 0$

2.3.4. Produit vectoriel

On appelle produit vectoriel de deux vecteurs $\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}$ noté $\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}$ une multiplication des deux vecteurs dont le résultat, comme son nom l'indique, sera un vecteur :

$$\forall\, \overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2} \in R^3 \text{ alors } \overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2} \in R^3$$

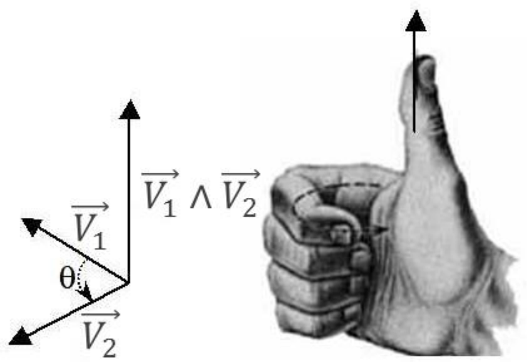
$$\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2} = \left\|\overrightarrow{V_1}\right\| . \left\|\overrightarrow{V_2}\right\| . sin\left(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}\right)\vec{n}$$



$\vec{n}$ est le vecteur unitaire normal à la surface délimitée par le plan $(\vec{V_1}, \vec{V_2})$ dont le sens est obtenu par la règle des trois doigts ou la règle de la main droite (dite aussi du bonhomme d'Ampère). $\vec{n} \perp \vec{V_1}$, $\vec{n} \perp \vec{V_2}$

Le produit vectoriel est nul si :

- Les deux vecteurs sont colinéaires ;
- L'un des vecteurs, est nul.

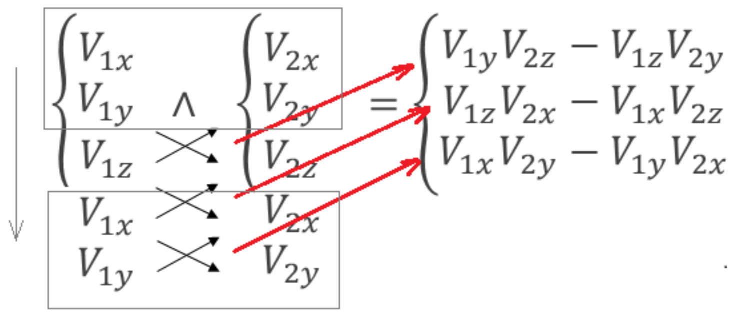


Expression analytique :

$$\vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = \begin{cases} V_{1x} \\ V_{1y} \\ V_{1z} \end{cases} \wedge \begin{cases} V_{2x} \\ V_{2y} \\ V_{2z} \end{cases} = \begin{cases} V_{1y}V_{2z} - V_{1z}V_{2y} \\ V_{1z}V_{2x} - V_{1x}V_{2z} \\ V_{1x}V_{2y} - V_{1y}V_{2x} \end{cases}$$

$$\vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = (V_{1y}V_{2z} - V_{1z}V_{2y})\vec{\imath} + (V_{1z}V_{2x} - V_{1x}V_{2z})\vec{\jmath} + (V_{1x}V_{2y} - V_{1y}V_{2x})\vec{k}$$

Méthode de calcul mnémonique :



Dans un repère orthonormé direct nous avons :

$$\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k};\ \vec{\jmath} \wedge \vec{k} = \vec{\imath};\ \vec{k} \wedge \vec{\imath} = \vec{\jmath}$$

Propriétés du produit vectoriel:

- Anticommutativité ou antisymétrie: $\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2} = -(\overrightarrow{V_2} \wedge \overrightarrow{V_1})$
- Associativité par rapport à la multiplication par un scalaire:

$$\lambda(\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}) = (\lambda\overrightarrow{V_1}) \wedge \overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{V_1} \wedge (\lambda\overrightarrow{V_2})$$

- Distributivité à gauche et à droite par rapport à la somme vectorielle :

$$\overrightarrow{V_1} \wedge (\overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_3}) = \overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_3}$$

$$(\overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_3}) \wedge \overrightarrow{V_1} = \overrightarrow{V_2} \wedge \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_3} \wedge \overrightarrow{V_1}$$

- Nul si et seulement si les deux vecteurs sont colinéaires :

$$\overrightarrow{V_1} \parallel \overrightarrow{V_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2} = \vec{0}$$

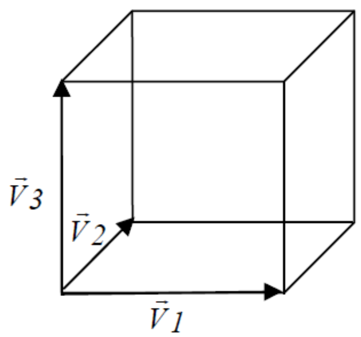
2.3.5. Produit mixte

On appelle produit mixte de trois vecteurs $\overrightarrow{V_1}$, $\overrightarrow{V_2}$ et $\overrightarrow{V_3}$ pris dans cet ordre, le nombre réel défini par :

$$\forall\, \overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3} \in R^3 \text{ alors } (\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3}) \in R$$

$$(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3}) = \overrightarrow{V_1} \cdot (\overrightarrow{V_2} \wedge \overrightarrow{V_3})$$

Le produit mixte est donc un scalaire égal au volume du parallélépipède formé par les trois vecteurs



Expression analytique

$$\overrightarrow{V_1} \cdot (\overrightarrow{V_2} \wedge \overrightarrow{V_3}) = \begin{vmatrix} V_{1x} & V_{1y} & V_{1z} \\ V_{2x} & V_{2y} & V_{2z} \\ V_{3x} & V_{3y} & V_{3z} \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{V_1} \cdot (\overrightarrow{V_2} \wedge \overrightarrow{V_3}) = V_{1x}(V_{2y}V_{3z} - V_{3y}V_{2z}) - V_{1y}(V_{2x}V_{3z} - V_{3x}V_{2z}) + V_{1z}(V_{2x}V_{3y} - V_{3x}V_{2y})$$

Le produit mixte est nul, si :

- Les trois vecteurs sont dans le même plan ;

– Deux des vecteurs sont colinéaires ;

– L'un des vecteurs est nul.

Cependant, le produit mixte est invariant scalaire par permutation circulaire directe des trois vecteurs car le produit scalaire est commutatif:

$$\vec{V_1} \cdot (\vec{V_2} \wedge \vec{V_3}) = \vec{V_2} \cdot (\vec{V_3} \wedge \vec{V_1}) = \vec{V_3} \cdot (\vec{V_1} \wedge \vec{V_2})$$

2.3.6. Double produit vectoriel

Le double produit vectoriel de trois vecteurs $\vec{V_1}$, $\vec{V_2}$ et $\vec{V_3}$ pris dans cet ordre, un vecteur exprimé par la relation :

$$\forall\, \vec{V_1}, \vec{V_2}, \vec{V_3} \in R^3 \text{ alors } \vec{V_1} \wedge (\vec{V_2} \wedge \vec{V_3}) \in R^3$$

$$\vec{V_1} \wedge (\vec{V_2} \wedge \vec{V_3}) = (\vec{V_1} \cdot \vec{V_3}) \cdot \vec{V_2} - (\vec{V_1} \cdot \vec{V_2}) \cdot \vec{V_3}$$

Le double produit vectoriel est perpendiculaire au vecteur $\vec{V_1}$, et au vecteur formé par le produit *vectoriel* $(\vec{V_2} \wedge \vec{V_3})$*,* il est donc dans le plan formé par les vecteurs $\vec{V_2}$ *et* $\vec{V_3}$.

2.4. Fonctions vectorielles et dérivées

2.4.1. Fonction vectorielle

Si à chaque valeur d'une variable scalaire t correspond un vecteur $\vec{V}(t)$, ce vecteur est appelé « fonction vectorielle » de t. $\vec{V}(t)$ est donc un vecteur dont le module, la direction et le sens dépendent de la variable t (qui sera en général le temps).

2.4.2. Règles de dérivation

Dans une base (O, x, y, z) fixe, le vecteur $\vec{V}(t)$ est donné par :

$$\vec{V}(t) = V_x(t)\vec{\imath} + V_y(t)\vec{\jmath} + V_z(t)\vec{k}$$

La dérivée de$\vec{V}(t)$ est définie par :

$$\frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{V}(t+\Delta t) - \vec{V}(t)}{\Delta t}$$

à condition que cette limite existe.

On utilisera comme notation, dans le cas où t représente le temps, sachant que la dérivée des vecteurs unitaires sont nuls (constant en grandeur et en direction) :

$$\dot{\vec{V}}(t) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{dV_x(t)}{dt}\vec{\imath} + \frac{dV_y(t)}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dV_z(t)}{dt}\vec{k}$$

$$\dot{\vec{V}}(t) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \dot{V}_x(t)\vec{\imath} + \dot{V}_y(t)\vec{\jmath} + \dot{V}_z(t)\vec{k}$$

De même, on peut définir des dérivées d'ordre supérieur. Par exemple, la dérivée seconde de $\vec{V}(t)$ est donnée par :

$$\ddot{\vec{V}}(t) = \frac{d^2\vec{V}(t)}{dt^2} = \frac{d^2V_x(t)}{dt^2}\vec{\imath} + \frac{d^2V_y(t)}{dt^2}\vec{\jmath} + \frac{d^2V_z(t)}{dt^2}\vec{k}$$

$$\ddot{\vec{V}}(t) = \frac{d^2\vec{V}(t)}{dt^2} = \ddot{V}_x\vec{\imath} + \ddot{V}_y\vec{\jmath} + \ddot{V}_z\vec{k}$$

Propriétés de la dérivée vectorielle :

– Si $\|\vec{V}\|$ est constant, $\dot{\vec{V}}$ n'est pas nécessairement nul ; en effet la direction de $\vec{V}(t)$ peut changer dans le temps
– <u>Si la direction de $\vec{V}(t)$ est constante</u> dans le temps, la dérivée $\dot{\vec{V}}$ se ramène à la dérivée du module, la direction de $\dot{\vec{V}}$ coïncidant avec celle constante de $\vec{V}(t)$

$$\dot{V} = \frac{d\|\vec{V}\|}{dt}$$

– Pour que la dérivée d'un vecteur soit nulle, il faut que le module soit constant <u>et</u> que la direction soit constante
– Dérivée de la somme vectorielle

$$\frac{d\left(\vec{V_1} + \vec{V_2}\right)}{dt} = \frac{d\vec{V_1}}{dt} + \frac{d\vec{V_2}}{dt} = \dot{\vec{V_1}} + \dot{\vec{V_2}}$$

– Dérivée de la multiplication d'un scalaire par un vecteur

$$\frac{d\left(\lambda\vec{V}\right)}{dt} = \lambda\frac{d\vec{V}}{dt} + \frac{d\lambda}{dt}\vec{V} = \lambda\dot{\vec{V}} + \dot{\lambda}\vec{V}$$

– Dérivée du produit scalaire

$$\frac{d\left(\vec{V_1}\cdot\vec{V_2}\right)}{dt} = \frac{d\vec{V_1}}{dt}\cdot\vec{V_2} + \vec{V_1}\cdot\frac{d\vec{V_2}}{dt} = \dot{\vec{V_1}}\cdot\vec{V_2} + \vec{V_1}\cdot\dot{\vec{V_2}}$$

– Dérivée du produit vectoriel

$$\frac{d\left(\vec{V_1}\wedge\vec{V_2}\right)}{dt} = \frac{d\vec{V_1}}{dt}\wedge\vec{V_2} + \vec{V_1}\wedge\frac{d\vec{V_2}}{dt} = \dot{\vec{V_1}}\wedge\vec{V_2} + \vec{V_1}\wedge\dot{\vec{V_2}}$$