Chapitre III : Statique

1. Introduction

La mécanique rationnelle ou théorique, est une science qui étudie le mouvement de la matière sous sa forme la plus simple. C'est une science qui traite des lois générales régissant le mouvement mécanique et l'état d'équilibre des corps ou des parties de corps matériels. Par mouvement mécanique, on entend le changement de position relative des corps matériels qui se produit dans le cours du temps.

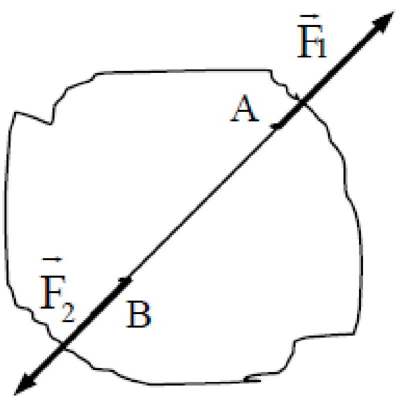
Puisque l'état d'équilibre (statique, fixe, stable) n'est qu'un cas particulier du mouvement, la mécanique rationnelle se donne aussi comme objet l'étude de l'équilibre des corps matériels.

La mécanique rationnelle utilise des simplifications, et des abstractions utiles, qui seront introduites pour examiner la question sur le plan théorique et de dégager la solution par les moyens les plus faciles. La méthode des abstractions, jointe à la généralisation des résultats de l'observation immédiate, de la production et de l'expérience, permet de dégager quelques concepts premiers qui se posent en axiomes. Tous les développements de la mécanique classique se déduisent de ces axiomes par voie de raisonnement logique et de calcul mathématique.

2. Axiomes de la statique

2.1. Axiome 1

Pour que deux forces appliquées à un solide parfait se trouvent en équilibre, il faut et il suffit qu'elles soient de module égal, de sens contraire et soient portées par la droite joignant leurs points d'application.



2.2. Axiome 2

Au système de forces appliqué à un solide parfait, on peut ajouter ou retrancher n'importe quel système de forces équilibré sans que l'effet du premier système s'en trouve modifié.

2.3. Axiome 3

Les forces exercées par deux solides l'un sur l'autre sont toujours de même module, de même direction et de sens opposé (Principe de l'action et de la réaction).

2.4. Axiome 4

Si un système de forces donné est équilibré sur un solide, il reste équilibré aussi sur tout autre solide. (Les dimensions et la forme du solide ne jouent aucun rôle dans la statique du solide parfait).

2.5. Axiome 5

Si un corps déformable se trouve en équilibre, il le reste aussi après la solidification (Principe de solidification).

2.6. Axiome 6

La résultante de deux forces appliquées à un même point du solide a son point d'application en ce même point ; son module et sa direction sont déterminés par la diagonale du parallélogramme construit sur ces deux forces (Règle du parallélogramme).

3. Liaisons, appuis et réactions

3.1. Définition

Les solides considérés en mécanique peuvent être libres ou liés, suivant le cas. Un solide est dit libre s'il peut se déplacer en toute direction, par exemple une pierre lancée dans l'espace est un solide libre. Un solide est dit lié s'il ne peut se déplacer que dans des directions déterminées ou s'il est assujetti à rester immobile.

Les corps matériels qui s'opposent au mouvement du solide sont appelés liaisons et les forces qu'ils exercent sur le solide, sont des réactions de liaisons.

3.2. Différents types des liaisons et de réactions

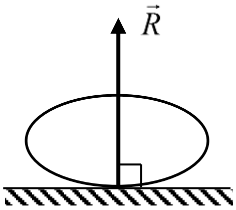
Les liaisons peuvent être matérialisées soit par des appuis, articulations, encastrements, …etc. Elles sont confectionnées à partir d'un matériau absolument rigide, et le frottement, aux points de contact avec les solides considérés, est généralement négligeable.

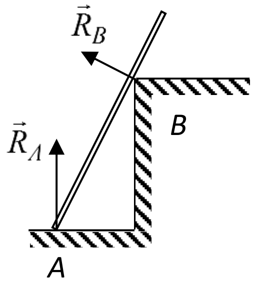
3.2.1. Liaison libre

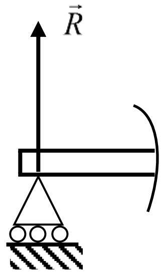
Cette liaison est en fait une absence de liaison, le solide est « livré à lui-même » (cas d'un satellite dans l'espace, ou d'un projectile). Il existe six degrés de liberté et aucun effort de contact transmis (pas de réaction).

3.2.2. Liaison ponctuelle et appui plan (appui simple)

Pour un solide repose simplement sur une surface polie (horizontale, verticale ou inclinée) ou sur le rouleau cylindrique, la réaction de la surface est appliquée au solide en point de contact et dirigée suivant la normale à la surface d'appui. Elle s'appelle réaction normale et se note $\vec{R}$.

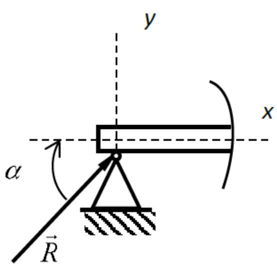


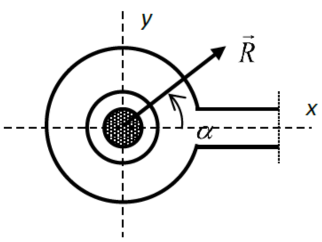


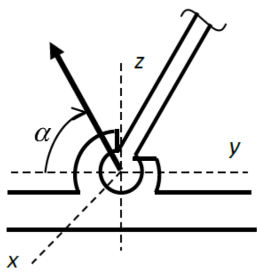


3.2.3. Solides articulés (Appuis doubles)

Dans la pratique, on trouve parfois le corps solide articulé soit par un appui articulé, une articulation cylindrique (liaison pivot glissant, liaison linéaire annulaire), ou une articulation sphérique (liaison rotule). Le module et la direction de la réaction $\vec{R}$ dans son plan sont inconnus.

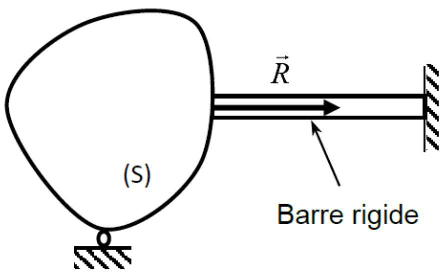






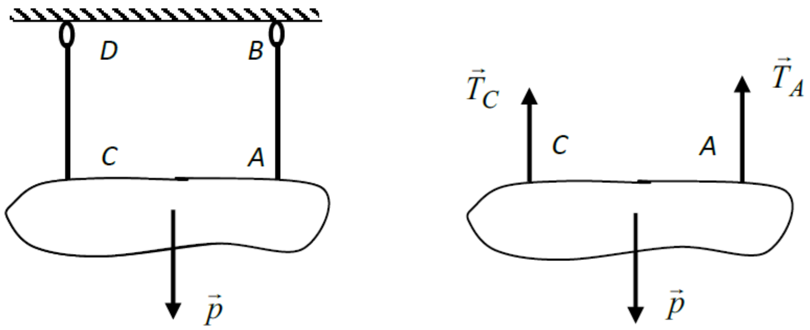
3.2.4. Barres rigides

Les barres de poids négligeables peuvent servir comme des liaisons. Leur réaction sera dirigée suivant la longueur de celle-ci.



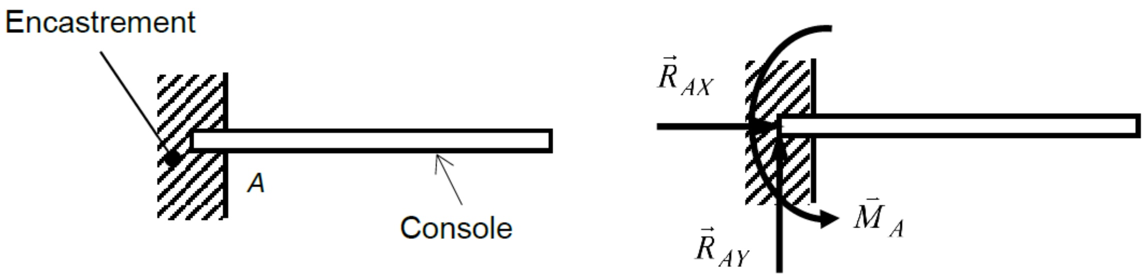
3.2.5. Liaison flexible (fil, corde, chaîne)

La réaction $\vec{T}$ porte le nom de tension. Elle est appliquée au point d'attache du lien flexible au solide, dirigée le long de la liaison flexible (du fil, de la corde, de la chaîne, etc.....)



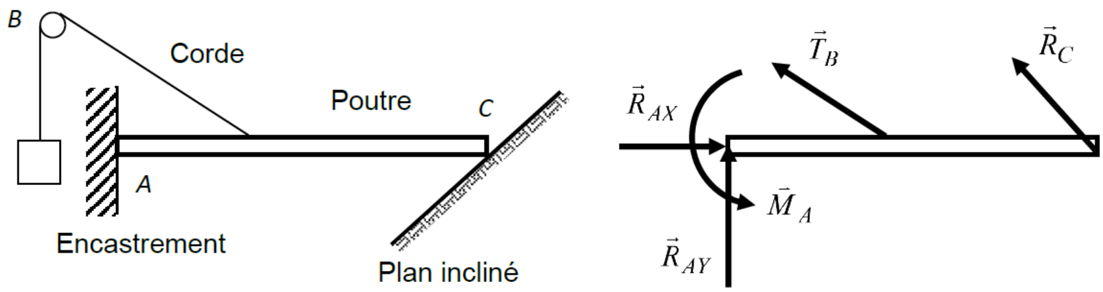
3.2.6. Liaison Encastrement

La liaison encastrement ne permet aucun mouvement relatif entre les deux solides. Leurs réactions sont représentées par un moment qui empêche la rotation du solide, et des réactions horizontale et verticale, qui empêchent les déplacements horizontaux et verticaux.



4. Axiome des liaisons

Pour tout corps solide lié, il est possible de supprimer les liaisons en les remplaçant par les réactions et, de le considérer comme un corps solide libre soumis à l'action des forces données et des réactions de liaisons.



5. Moment d'une force par rapport à un point

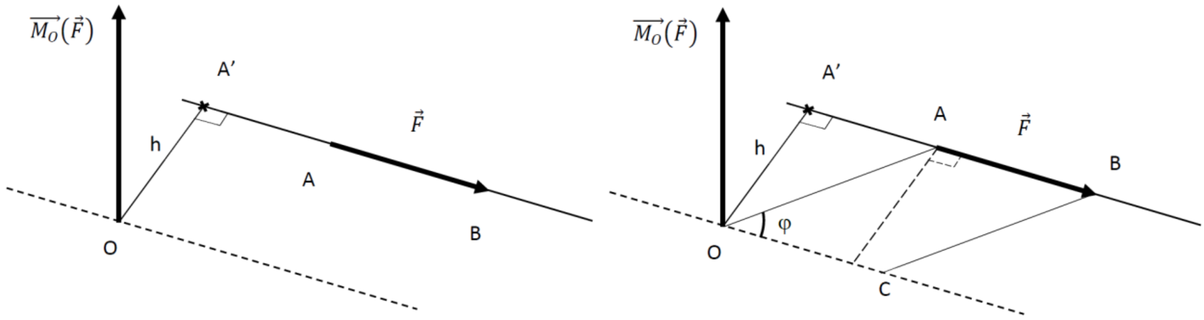
5.1. Définition

On appelle moment en O d'une force $\vec{F} = \overrightarrow{AB}$ le vecteur lié $\overrightarrow{OG}$ d'origine O et représentant le produit vectoriel $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB}$ noté :

$$\overrightarrow{M_O}(\vec{F}) = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB}$$

Remarque : De la définition précédente, il vient que le moment est perpendiculaire au plan de ces deux vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{M_O}(\vec{F}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$



Le module du moment d'une force est égal à l'aire du parallélogramme OABC.

$$\left\|\overrightarrow{M_O}(\vec{F})\right\| = S_{OABC} = F.h = F.OA.\sin\varphi$$

Le moment de $\vec{F}$ par rapport à O est le produit du module F du vecteur de la force $\vec{F}$ par le bras de levier h, qui peut être affecté de signe positif ou négatif.

$$M_O(\vec{F}) = \mp F.h$$

$M_O(\vec{F}) > 0$ si la force fait tourner le plan dans le sens contraire à celui des aiguilles d'une montre

$M_O(\vec{F}) < 0$ si la force fait tourner le plan dans le sens des aiguilles d'une montre

5.2. Théorème

Le moment en un point d'un vecteur (force) est indépendant du représentant $[\overrightarrow{AB}]$ adopté pour caractériser ce vecteur.

soit $\left[\overrightarrow{A'B'}\right]$ un autre représentant de la force $\vec{F}$.

$$\overrightarrow{M_O}(\vec{F}) = \overrightarrow{OA'} \wedge \overrightarrow{A'B'} = \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AA'}\right) \wedge \overrightarrow{A'B'}$$

$$= \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{AA'} \wedge \overrightarrow{A'B'}$$

Mais $\overrightarrow{AA'} \wedge \overrightarrow{A'B'} = \vec{0}$ puisque $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont colinéaires, donc

$$\overrightarrow{M_O}(\vec{F}) = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{A'B'}$$

de plus $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$, il vient donc

$$\overrightarrow{M_O}(\vec{F}) = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB}$$

5.3. Coordonnées du moment d'une force

Soit un repère orthonormé direct R et un point P sur ce repère considérons une force $\vec{F} = \overrightarrow{AB}$.

Par définition :

$$\overrightarrow{M_P}(\vec{F}) = \overrightarrow{PA} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PA} \wedge \vec{F}$$

$$\overrightarrow{M_P}(\vec{F}) = \begin{cases} x_A - x_P \\ y_A - y_P \\ z_A - z_P \end{cases} \wedge \begin{cases} F_x \\ F_y \\ F_z \end{cases}$$

$$\overrightarrow{M_P}(\vec{F}) = \begin{cases} (y_A - y_P)F_z - (z_A - z_P)F_y \\ (z_A - z_P)F_x - (x_A - x_P)F_z \\ (x_A - x_P)F_y - (y_A - y_P)F_x \end{cases}$$

5.4. Changement d'origine des moments

Soit un vecteur glissant $\overrightarrow{AB}$ et deux points O et O'. Cherchons la relation qui existe entre $\overrightarrow{M_O}(\overrightarrow{AB})$ et $\overrightarrow{M_{O'}}(\overrightarrow{AB})$.

Par définition

$$\overrightarrow{M_O}(\vec{F}) = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{M_{O'}}(\vec{F}) = \overrightarrow{O'A} \wedge \overrightarrow{AB}$$

Cette dernière équation peut encore s'écrire

$$\overrightarrow{M_{O'}}(\vec{F}) = \left(\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA}\right) \wedge \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{M_{O'}}(\vec{F}) = \overrightarrow{O'O} \wedge \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB}$$

On obtient finalement la formule de changement d'origine du moment :

$$\boxed{\overrightarrow{M_{O'}}(\vec{F}) = \overrightarrow{M_O}(\vec{F}) + \overrightarrow{O'O} \wedge \overrightarrow{AB}}$$

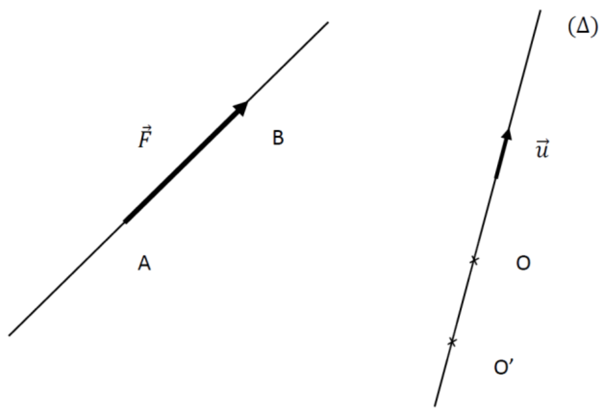
6. Moment d'une force par rapport à un axe

6.1. Définition

Soient $\vec{F}$ une force ayant pour représentant le vecteur glissant $\overrightarrow{AB}$, et un axe (Δ) de vecteur unitaire $\vec{u}$.

On appelle moment d'un vecteur glissant par rapport à un axe (Δ) la projection sur cet axe du moment par rapport à un point quelconque de l'axe.

$$\boxed{M_{/\Delta}(\overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB}) \cdot \vec{u}}$$



6.2. Théorème

Le moment par rapport à un axe est indépendant du point choisi sur cet axe.

Soit O' un autre point de l'axe (Δ), calculons la quantité : $\left(\overrightarrow{O'A} \wedge \overrightarrow{AB}\right) \cdot \vec{u}$

$$\left(\overrightarrow{O'A} \wedge \overrightarrow{AB}\right) \cdot \vec{u} = \left[\left(\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA}\right) \wedge \overrightarrow{AB}\right] \cdot \vec{u}$$

$$= \left(\overrightarrow{O'O} \wedge \overrightarrow{AB}\right) \cdot \vec{u} + \left(\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB}\right) \cdot \vec{u}$$

Or $\left(\overrightarrow{O'O} \wedge \overrightarrow{AB}\right) \cdot \vec{u} = 0$ (produit mixte de deux vecteurs colinéaire)

$$\left(\overrightarrow{O'A} \wedge \overrightarrow{AB}\right) \cdot \vec{u} = \left(\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB}\right) \cdot \vec{u} = M_{/\Delta}\left(\overrightarrow{AB}\right)$$

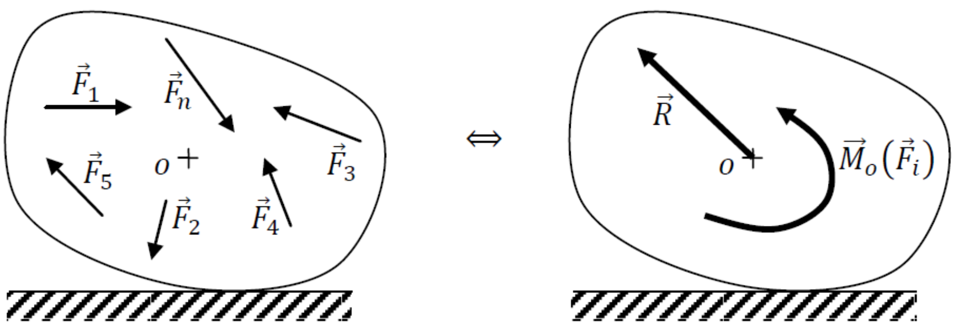
7. Torseur des forces extérieures

Les efforts appliqués sur un système matériel peuvent être représentés mathématiquement par un torseur, appelé torseur d'action, qui s'écrit en un point O :

$$\{F\}_O = \begin{Bmatrix} \vec{F} \\ \overrightarrow{M_O} \end{Bmatrix}$$

$\vec{F}$ représente la résultante des forces extérieures appliquées $\vec{R}$;

$\overrightarrow{M_O}$ représente le moment de la force $\vec{F}$ par rapport au point O.



Le torseur des efforts extérieurs exercés sur (S) en un point O s'écrit:

$$\{F_{ext}\}_O = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{F_{ext}} \\ \overrightarrow{M_O}(\overrightarrow{F_{ext}}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{R} = \sum \vec{F_i} \\ \sum \overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{F_i} \end{Bmatrix}$$

8. Conditions d'équilibre

8.1. Conditions d'équilibre statique (cas général)

Un solide (S) est en équilibre par rapport à un repère fixe (R) si chaque point de (S) reste fixe dans le temps par rapport à (R). En conséquence, le torseur des forces extérieurs en tout point O est nul où :

$$\{F_{ext}\}_O = \{0\}_0$$

$$\begin{Bmatrix} \vec{R} = \overrightarrow{F_{ext}} \\ \overrightarrow{M_O}(\overrightarrow{F_{ext}}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

Pour que le système de forces appliquées à un solide soit en équilibre, il faut et il suffit que la résultante générale du système et le moment résultant par rapport à un centre de réduction quelconque soient égaux à zéro, où :

$$\vec{R} = \sum \vec{F_i} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{M_O}(\overrightarrow{F_{ext}}) = \sum \overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{F_i} = \vec{0}$$

8.2. Conditions d'équilibre analytique

8.2.1. Forces quelconques

La condition d'équilibre analytique d'un corps solide est que la projection des éléments du torseur des forces extérieures soit nulle. Cette projection sur les axes d'un repère orthonormé R(O, xyz) permet d'obtenir en général six équations :

- Trois équations liées à la résultante des forces extérieures;
- Trois équations liées au moment des forces par rapport aux axes du repère,

$$\vec{R} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{R_x} = \sum \overrightarrow{F_{ix}} = \vec{0} \\ \overrightarrow{R_y} = \sum \overrightarrow{F_{iy}} = \vec{0} \\ \overrightarrow{R_x} = \sum \overrightarrow{F_{iz}} = \vec{0} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{M_O}(\overrightarrow{F_{ext}}) = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{M_{Ox}} = \sum \overrightarrow{M_{Oix}} = \vec{0} \\ \overrightarrow{M_{Oy}} = \sum \overrightarrow{M_{Oiy}} = \vec{0} \\ \overrightarrow{M_{Oz}} = \sum \overrightarrow{M_{Oiz}} = \vec{0} \end{cases}$$

8.2.2. Forces concourantes

Dans le cas d'un système de forces concourantes au centre O, le moment sera nul par rapport à O (le bras de levier est nul).

Il reste seulement trois équations pour la projection de la résultante:

$$\vec{R} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{R_x} = \sum \overrightarrow{F_{ix}} = \vec{0} \\ \overrightarrow{R_y} = \sum \overrightarrow{F_{iy}} = \vec{0} \\ \overrightarrow{R_x} = \sum \overrightarrow{F_{iz}} = \vec{0} \end{cases}$$

8.2.3. Forces planes

Dans le cas d’un problème plan (par exemple X et Y), on aura trois équations d'équilibre.

- Deux équations liées à la résultante statique;

- Et une équation pour le moment des forces par rapport au centre O

$$\vec{R} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{R_x} = \sum \overrightarrow{F_{ix}} = \vec{0} \\ \overrightarrow{R_y} = \sum \overrightarrow{F_{iy}} = \vec{0} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{M_O}(F_{ext}) = \vec{0}$$

8.3. Conditions d’équilibre géométrique

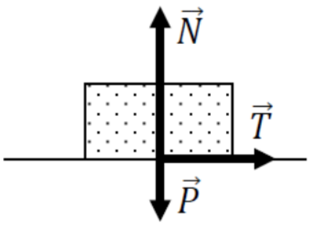
Pour que le système de forces concourantes soit en équilibre, il faut et il suffit que le polygone des forces soit fermé.

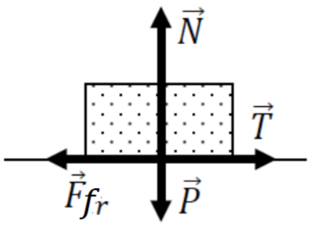
9. Équilibre des solides en présence du frottement

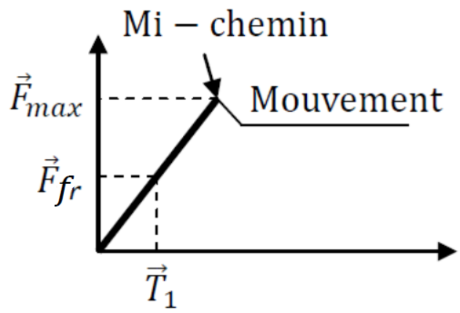
9.1. Frottement de glissement

On appelle frottement de glissement la résistance qui s’oppose au glissement de deux solides à paroi rugueuse en contact.

Soit un solide de poids $\vec{P}$ qui repose sur une surface horizontale. Appliquons à ce solide une force horizontale $\vec{T}$.







1er cas : Surfaces en contact polies

La force du poids $\vec{P}$ est équilibrée par la réaction $\vec{N}$. Dans ce cas, aucune force ne s'oppose à la force motrice $\vec{T}$. Le solide est en mouvement.

2ème cas : Surfaces en contact rugueuses

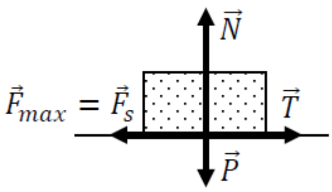
La force du poids $\vec{P}$ est équilibrée par la réaction $\vec{N}$. Le solide peut rester au repos, dans ce cas, il existe une autre force qui s'oppose au mouvement du solide de même direction et de sens opposée à $\vec{T}$. On appellera cette force, force de frottement de glissement $\overrightarrow{F_{fr}}$.

Augmentons progressivement la force $\vec{T}$. Tant que le solide reste au repos, la force $\overrightarrow{F_{fr}}$ équilibre à chaque instant la force motrice $\vec{T}$, dans ce cas la force $\overrightarrow{F_{fr}}$ augmente avec elle jusqu'à une valeur maximale F_{max} ($F_{fr} \leq F_{max}$) où le corps solide est en mouvement. La force maximale $\overrightarrow{F_{max}}$ correspond au cas limite de l'équilibre du solide, c'est à dire à l'instant où celui-ci est à mi-chemin (dans la zone de transition) entre le repos et le mouvement.

9.1.1. Force de frottement statique

La force de frottement de glissement est une force résistante qui agit dans le plan tangent aux deux surfaces de contact dans le sens opposé à la force motrice et de direction parallèle aux surfaces de contact.

La force de frottement qui agit lorsque le corps se trouve avant le mouvement (immobile) s'appelle force de frottement de repos ou force de frottement statique.



D'après la loi d'Amontons – Coulomb, la valeur maximale du module de la force de frottement de repos où statique $\overrightarrow{F_{max}}$ ou $\vec{F_s}$ est proportionnelle à la pression normale du solide sur la surface d'appui :

$$\overrightarrow{F_{max}} = \mu_0 \vec{N}$$

où μ_0 est le coefficient de frottement de glissement, sans dimension, qui est en fonction des matériaux des surfaces en contact et de l'état de ces surfaces.

9.1.2. Force de frottement cinétique

La force de frottement qui agit quand un solide se déplace sur l'autre, est la force de frottement cinétique F_c. Elle est aussi proportionnelle à la réaction normale :

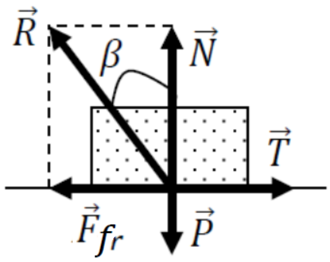
$$\vec{F_c} = \mu_c \vec{N}$$

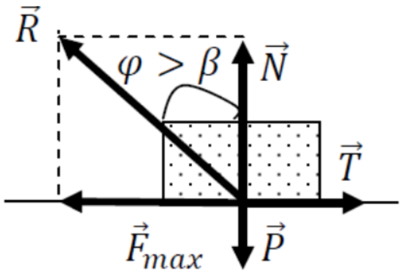
où μ_c est le coefficient de frottement cinétique. Il est fonction de la vitesse de mouvement. Il reste toujours inférieur au coefficient de frottement au repos $(\mu_c < \mu_0)$.

9.2. Angle de frottement

Lorsque le corps solide est au repos, la réaction totale d'une surface rugueuse $\vec{R}$, compte tenu du frottement, est déterminée en module et en direction par la diagonale du rectangle formé par la réaction normale $\vec{N}$ et la force de frottement $\overrightarrow{F_{fr}}$:

$$\vec{R} = \vec{N} + \overrightarrow{F_{fr}}$$





La direction de $\vec{R}$ fait un angle β avec $\vec{N}$ du côté opposé à $\vec{T}$. Dans ce cas, plus $\vec{T}$ est grand, plus la direction de $\vec{R}$ s'écarte de la normale. L'écart maximal est constaté lorsque $F_{fr} = F_{max}$. La valeur maximale de l'angle d'écart β s'appelle angle de frottement φ, et s'exprime par :

$$\tan\varphi = \frac{F_{max}}{N} = \mu_0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arctan(\mu_0)$$