Chapitre IV : Cinématique du solide rigide
(1ère partie : cinématique du point matériel)

1. Introduction

La cinématique consiste à analyser le mouvement de "points" sans se préoccuper des causes de ce mouvement. L'espace sera supposé euclidien et isotrope, c'est à dire possédant les mêmes propriétés dans toutes les directions. D'autre part, en mécanique classique, le temps est considéré comme absolu; il ne dépend pas du repère. Il faut savoir que la relativité rejette cette notion de temps absolu et montre que l'on ne peut confondre les temps de deux repères que lorsque les vitesses sont faibles devant la vitesse de la lumière.

La position d'un point est généralement donnée dans un référentiel physique: le laboratoire, la terre, le soleil, l'observateur … Un repère lui est attaché, et un système de coordonnées est défini pour décrire le mouvement.

Il est bien clair que deux observateurs placés dans des repères en mouvement l'un par rapport à l'autre ne percevront pas le même mouvement.

2. Paramétrage de la position d'un point

2.1. Système des coordonnées

En mécanique on définit la position d'un point M par rapport à un repère de référence choisi (R) à l'aide du vecteur position de M par rapport à O origine du repère (R) : $\overrightarrow{OM}$.

Les paramétrages qui définissent la position d'un point dans un repère (R) sont :

- Les coordonnées cartésiennes,
- les coordonnées cylindriques ou polaires,
- les coordonnées sphériques.

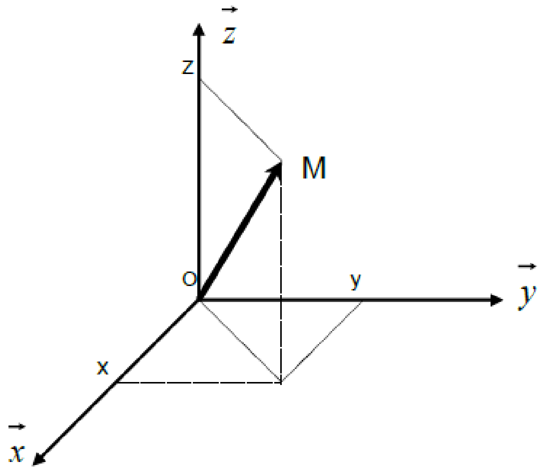
Le type de coordonnées est choisi en fonction du problème que l'on a à traiter (problème à symétrie de révolution autour d'un axe, problème à symétrie sphérique, …).

2.1.1. Coordonnées cartésiennes

x, y, z sont les coordonnées d'un point M dans un repère R(O, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$) tel que O est l'origine du repère et ($\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$) les vecteurs unitaires orthogonaux de R définissant une base.

La donnée des 3 variables (x,y,z) définit un point et un seul de l'espace. Le vecteur position de M par rapport à O dans le repère (R) est donné par :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_R$$

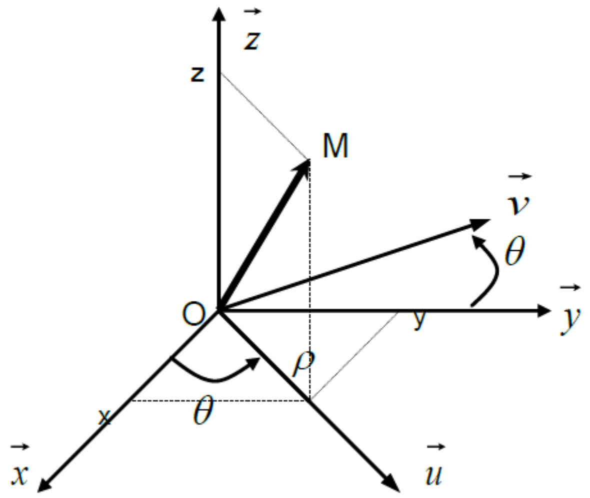


2.1.2. Coordonnées cylindriques ou polaires

ρ, z sont les coordonnées de M dans un repère $R_1(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$ tel que O origine du repère et $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$ les vecteurs unitaires orthogonaux de (R_1) définissant une base.

La donnée des 3 variables (ρ, θ, z) définit un point et un seul de l'espace. Le vecteur position de M par rapport à O dans le repère (R_1) est donné par :

$$\overrightarrow{OM} = \rho\vec{u} + z\vec{z} = \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ z \end{pmatrix}_{R_1}$$



Ce même vecteur peut être exprimé dans (R) par :

$$\overrightarrow{OM} = \rho\cos\theta\,\vec{x} + \rho\sin\theta\,\vec{y} + z\vec{z} = \begin{pmatrix} \rho\cos\theta \\ \rho\sin\theta \\ z \end{pmatrix}_{R}$$

$$x = \rho\cos\theta$$

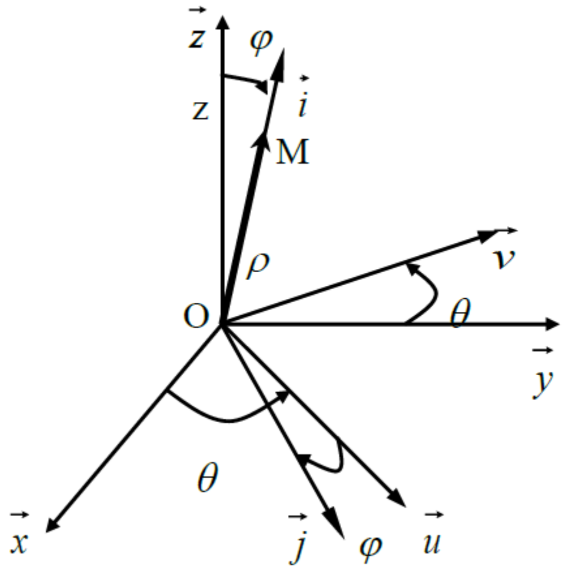
$$y = \rho\sin\theta$$

2.1.3. Coordonnées sphériques

ρ est la coordonnée de M dans un repère R₂(O, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{v}$) tel que O origine du repère et ($\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{v}$) les vecteurs unitaires orthogonaux de (R_2) définissant une base.

La donnée des 3 variables (ρ, θ, φ) définit un point et un seul de l'espace. Le vecteur position de M par rapport à O dans le repère (R_2) est donné par :

$$\overrightarrow{OM} = \rho\vec{\imath} = \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_2}$$



Ce même vecteur peut être exprimé dans (R_1) par :

$$\overrightarrow{OM} = \rho\sin\varphi\,\vec{u} + \rho\cos\varphi\,\vec{z} = \begin{pmatrix} \rho\sin\varphi \\ 0 \\ \rho\cos\varphi \end{pmatrix}_{R_1}$$

Ce même vecteur peut être exprimé dans (R) par :

$$\overrightarrow{OM} = \rho\sin\varphi\cos\theta\,\vec{x} + \rho\sin\varphi\sin\theta\,\vec{y} + \rho\cos\varphi\,\vec{z} = \begin{pmatrix} \rho\sin\varphi\cos\theta \\ \rho\sin\varphi\sin\theta \\ \rho\cos\varphi \end{pmatrix}_{R}$$

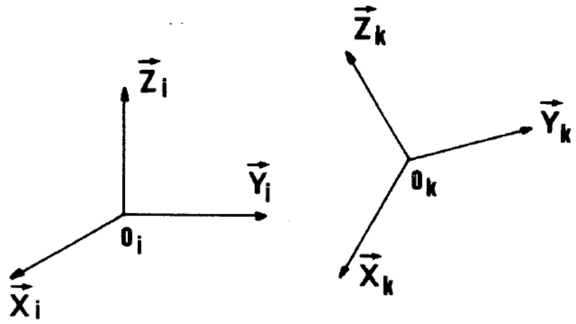
$$x = \rho\sin\varphi\cos\theta$$

$$y = \rho\sin\varphi\sin\theta$$

$$z = \rho\cos\varphi$$

2.2. Changement de système de coordonnées

Soient deux repères $R_i(O_i, \overrightarrow{x_i}, \overrightarrow{y_i}, \overrightarrow{z_i})$ et $R_k(O_k, \overrightarrow{x_k}, \overrightarrow{y_k}, \overrightarrow{z_k})$ en mouvement l'un par rapport à l'autre :



2.2.1. Repérage de l'origine O_k

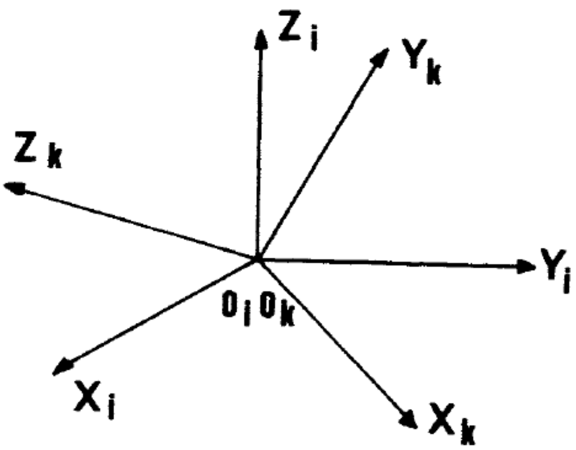
Il suffit de connaître les coordonnées de $\overrightarrow{O_\iota O_k}$ sur (R_i) ou sur (R_k).

On devra donc connaître par exemple les trois fonctions :

$$\begin{cases} \overrightarrow{O_\iota O_k}.\overrightarrow{x_\iota} \\ \overrightarrow{O_\iota O_k}.\overrightarrow{y_\iota} \\ \overrightarrow{O_\iota O_k}.\overrightarrow{z_\iota} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \overrightarrow{O_\iota O_k}.\overrightarrow{x_k} \\ \overrightarrow{O_\iota O_k}.\overrightarrow{y_k} \\ \overrightarrow{O_\iota O_k}.\overrightarrow{z_k} \end{cases}$$

2.2.2. Repérage de l'orientation du repère (R_k) par rapport à (R_i)

Pour cela ramenons l'origine O_k en O_i.



a) Matrice des 9 cosinus directeurs

1°) Les trois axes sont confondus

$$\overrightarrow{x_k} = \overrightarrow{x_\iota}\ ;\ \overrightarrow{y_k} = \overrightarrow{y_\iota}\ ;\ \overrightarrow{z_k} = \overrightarrow{z_\iota}$$

On dit que le repère (R_k) est ***<u>en translation</u>*** par rapport au repère (R_i).

2°) Les trois axes ont une orientation quelconque

On repère les différents vecteurs $\overrightarrow{x_k}, \overrightarrow{y_k}, \overrightarrow{z_k}$ par leurs cosinus directeurs :

$$\begin{array}{cccc} & \overrightarrow{x_k} & \overrightarrow{y_k} & \overrightarrow{z_k} \\ \overrightarrow{x_i} & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \overrightarrow{y_i} & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \overrightarrow{z_i} & \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{array}$$

La matrice [P] définie par :

$$[P] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$$

est appelée ***matrice de passage*** de la base de (R_i)

b) Propriété de la matrice des 9 cosinus directeurs

1°) Il suffit seulement de trois paramètres indépendants pour repérer l'orientation

Les vecteurs $\overrightarrow{x_k}, \overrightarrow{y_k}, \overrightarrow{z_k}$ sont unitaires et orthogonaux :

$$\begin{array}{lcl} x_k^2 = 1 & & \overrightarrow{x_k} \cdot \overrightarrow{y_k} = 0 \\ y_k^2 = 1 & ; & \overrightarrow{y_k} \cdot \overrightarrow{z_k} = 0 \\ z_k^2 = 1 & & \overrightarrow{z_k} \cdot \overrightarrow{x_k} = 0 \end{array}$$

Les 9 cosinus directeurs ne sont donc pas indépendants mais liés par 6 relations. Il suffit donc de 3 paramètres pour définir entièrement l'orientation du repère (R_k) par rapport au repère (R_i).

2°) Si les deux trièdres (R_i) et (R_k) ont même orientation la matrice de passage [P] est une matrice orthogonale droite

Rappel : Une matrice est dite orthogonale si son inverse est égale à sa transposée. On dit qu'elle est droite si son déterminant est égal à + 1.

Si (R_k) est un trièdre direct alors :

$$\overrightarrow{x_k} = \overrightarrow{y_k} \wedge \overrightarrow{z_k} \quad ; \qquad \overrightarrow{y_k} = \overrightarrow{z_k} \wedge \overrightarrow{x_k} \; ; \qquad \overrightarrow{z_k} = \overrightarrow{x_k} \wedge \overrightarrow{y_k}$$

Ses équations s'écrivent dans le repère (R_i) :

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{32} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} \alpha_{13} \\ \alpha_{23} \\ \alpha_{33} \end{bmatrix} \; ; \quad \begin{bmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{13} \\ \alpha_{23} \\ \alpha_{33} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{31} \end{bmatrix} \; ; \quad \begin{bmatrix} \alpha_{13} \\ \alpha_{23} \\ \alpha_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{31} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{32} \end{bmatrix}$$

- Montrons que la matrice [P] est orthogonale :

Prenons deux colonnes quelconques :

$$colonne\ i = \begin{bmatrix} \alpha_{1i} \\ \alpha_{2i} \\ \alpha_{3i} \end{bmatrix} \quad ; \qquad colonne\ j = \begin{bmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \alpha_{3j} \end{bmatrix}$$

Si les deux colonnes sont distinctes alors :

$$\text{colonne i . colonne j} = \alpha_{1i}\alpha_{1j} + \alpha_{2i}\alpha_{2j} + \alpha_{3i}\alpha_{3j} = 0$$

S'il s'agit de la même colonne i=j alors :

$$\text{colonne i . colonne i} = \alpha_{1i}^2 + \alpha_{2i}^2 + \alpha_{3i}^2 = 1$$

Ce qui donne :

$$\sum_{k=1}^{3} \alpha_{ki}\alpha_{kj} = 0, \qquad si\ i \neq j$$

$$\sum_{k=1}^{3} \alpha_{ki}\alpha_{kj} = 1, \qquad si\ i = j$$

En utilisant le symbole de Kronecker

$$\sum_{k=1}^{3} \alpha_{ki}\alpha_{kj} = \delta_{ij}$$

Sachant qu'une matrice est orthogonale si et seulement si pour toute colonne (respectivement ligne) la somme des carrés des éléments est égale à + 1 et si pour tout couple de colonne (respectivement ligne) la somme des produits des éléments correspondants est égale à 0.

La matrice [P] est donc orthogonale.

- Montrons que la matrice orthogonale [P] est droite :

Calculons le déterminant de la matrice [P] :

$$\Delta = (\overrightarrow{x_k}, \overrightarrow{y_k}, \overrightarrow{z_k}) = (\overrightarrow{x_k} \wedge \overrightarrow{y_k}) \cdot \overrightarrow{z_k} = 1$$

Le déterminant est égal à +1 car le repère (R_k) est de sens direct.

Finalement la matrice [P] est orthogonale droite.

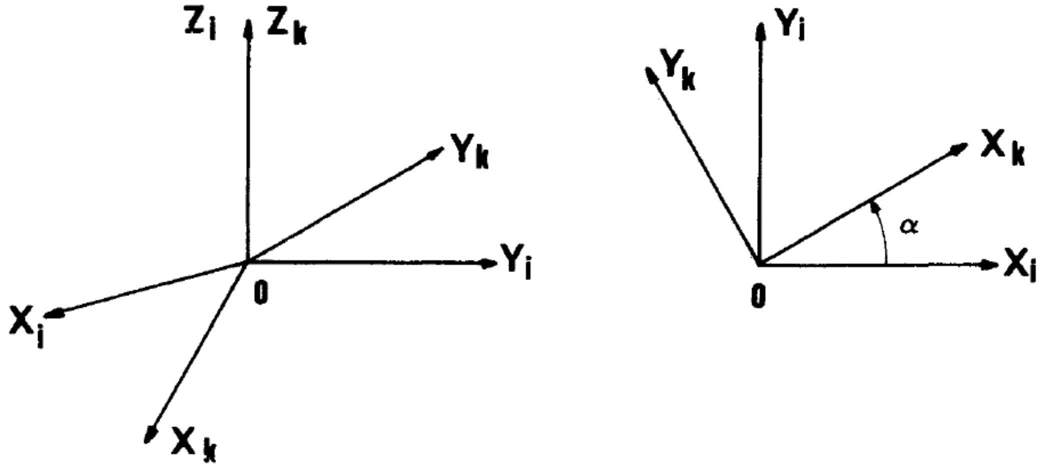
Propriétés des matrices orthogonales :

- le produit de deux matrices orthogonales est une matrice orthogonale
- une matrice orthogonale réelle ne peut admettre que pour valeur propre réelle ± 1
- chaque élément est égal à son mineur dans le développement du déterminant
- dans un espace euclidien de dimension finie une matrice de passage transforme une base orthonormée en une base orthonormée si et seulement si elle est orthogonale.

c) Angles d'Euler

L'orientation de (R_k) par rapport à (R_i), comme nous l'avons vu précédemment ne dépend que de 3 paramètres. Il parait donc nécessaire de trouver trois paramètres indépendants permettant de faire ce repérage. Les plus utilisés sont les angles d'Euler.

1°) Un axe de (R_k) est confondu avec un axe de (R_i) par exemple $\overrightarrow{z_k} = \overrightarrow{z_\iota}$



Pour définir la position du repère (R_k) par rapport au repère (R_i) il suffit de connaître l'angle : $\alpha = (\overrightarrow{x_\iota}, \overrightarrow{x_k})$ (orientation autour de $\overrightarrow{z_\iota}$ ou $\overrightarrow{z_k}$)

La matrice de passage peut alors s'écrire :

$$[P] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- La matrice [P] est orthogonale droite :

$$[P]^T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[P]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donc

$$[P]^{-1} = [P]^T$$

$$\Delta = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

- chaque élément est égal à son cofacteur

La vérification est immédiate. Soit par exemple $\alpha_{12} = -\sin\alpha$ le cofacteur est $(-1)\sin\alpha = -\sin\alpha$

- pour les lignes et les colonnes la relation suivante est vérifiée

$$\sum_{k=1}^{3} \alpha_{ki}\alpha_{kj} = \delta_{ij}$$

exemple : cas où $i = j = 1$:

$$\sum_{k=1}^{3} \alpha_{k1}\alpha_{k1} = \alpha_{11}^2 + \alpha_{21}^2 + \alpha_{31}^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha + 0$$

$$\sum_{k=1}^{3} \alpha_{k1}\alpha_{k1} = 1$$

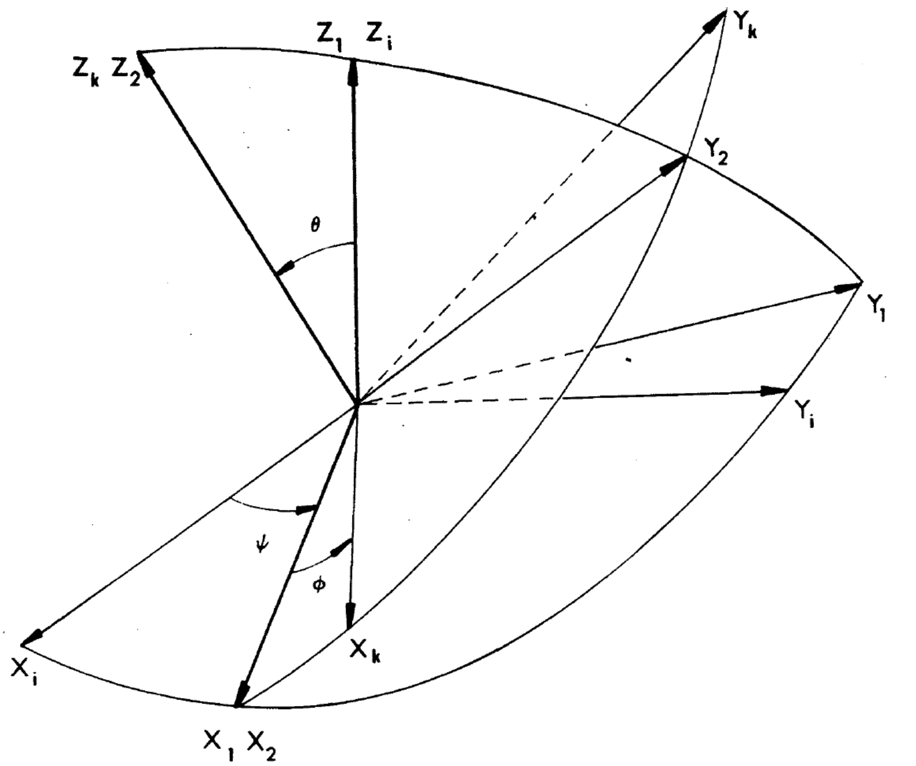
exemple : cas où $i \neq j, i = 1; j = 2$

$$\sum_{k=1}^{3} \alpha_{k1}\alpha_{k2} = \alpha_{11}\alpha_{12} + \alpha_{21}\alpha_{22} + \alpha_{31}\alpha_{32} = \cos\alpha\,(-\sin\alpha) + \sin\alpha\cos\alpha + 0 = 0$$

$$\sum_{k=1}^{3} \alpha_{k1}\alpha_{k1} = \delta_{12}$$

2°) Les axes sont tous distincts – Angles d'Euler

Nous allons passer du repère (R_i) au repère (R_k) à l'aide de deux repères intermédiaires (R_1) et (R_2) qui jouent un rôle pratique important et qui définissent les angles d'Euler de type I.



- construction du repère (R1) :

$\overrightarrow{z_i}$ est différent de $\overrightarrow{z_k}$, les deux plan $(O, \overrightarrow{x_i}, \overrightarrow{y_i})$ et $(O, \overrightarrow{x_k}, \overrightarrow{y_k})$ se coupent suivant une droite appelée ligne des nœuds. on l'oriente arbitrairement par le vecteur unitaire $\overrightarrow{x_1}$.

On repère $\overrightarrow{x_1}$ par l'angle : $\psi = (\overrightarrow{x_i}, \overrightarrow{x_1})$ (orientation autour de $\overrightarrow{z_i}$)

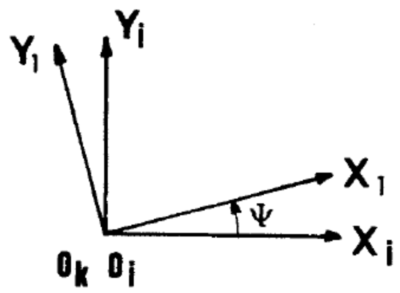
On construit alors le repère (R_1) de la manière suivante :

on trace $\overrightarrow{z_1} = \overrightarrow{z_i}$

on complète par $\overrightarrow{y_1}$ de telle manière que le repère $R_1(O_1, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$ soit direct.

finalement, on passe de (R_i) à (R_1) par la rotation d'angle ψ autour de $\overrightarrow{z_1} = \overrightarrow{z_i}$

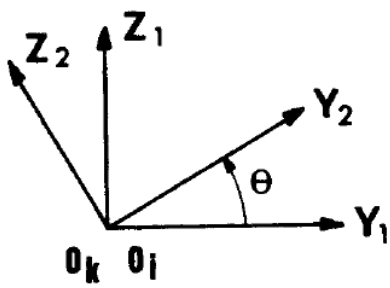
L'angle ψ est appelé ***angle de précession***



- construction du repère (R2) :

on passe du repère (R_1) à (R_2) par une rotation d'angle θ autour de $\overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{x_2}$

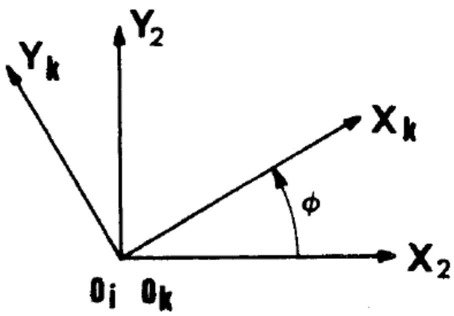
$\theta = (\overrightarrow{z_1}, \overrightarrow{z_2})$ est appelé ***angle de nutation***



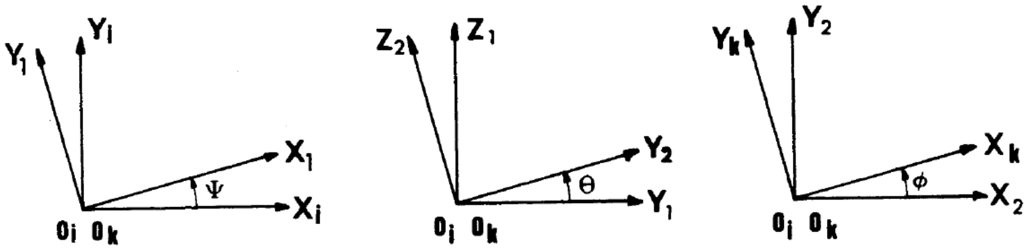
- passage de (R_2) à (R_k) :

on passe du repère (R_2) à (R_k) par une rotation d'angle ϕ autour de $\overrightarrow{z_2} = \overrightarrow{z_k}$

$\phi = (\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_k})$ est appelé ***angle de rotation propre***



Finalement, on passe de (R_i) à (R_k) par trois rotations successives



2.2.3. Changement de repère

a) Transformation des coordonnées d'un vecteur

1°) Expression matricielle

Soit un repère (R_i) de vecteurs de base $\vec{x_i}, \vec{y_i}, \vec{z_i}$ et un repère (R_k) de vecteurs de base $\vec{x_k}, \vec{y_k}, \vec{z_k}$. On définit l'orientation du repère (R_k) (nouveau) par rapport au repère (R_i) (ancien) en donnant la matrice de passage :

$$\begin{array}{cccc} & \vec{x_k} & \vec{y_k} & \vec{z_k} \\ \vec{x_i} & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \vec{y_i} & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \vec{z_i} & \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{array}$$

Soit un vecteur $\vec{W}$ dont les composantes sont respectivement (X_i, Y_i, Z_i) et (X_k, Y_k, Z_k) sur (R_i) et (R_k). Connaissant l'un des systèmes de composantes, trouver l'autre.

On peut écrire

$$\vec{W} = X_i\vec{x_i} + Y_i\vec{y_i} + Z_i\vec{z_i}$$

$$\vec{W} = X_k\vec{x_k} + Y_k\vec{y_k} + Z_k\vec{z_k}$$

on peut écrire le vecteur $\vec{W}$ sous les formes suivantes

$$\vec{W} = [\vec{x_i}\ ;\ \vec{y_i}\ ;\ \vec{z_i}]\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix}$$

$$\vec{W} = [\vec{x_k}\ ;\ \vec{y_k}\ ;\ \vec{z_k}]\begin{bmatrix} X_k \\ Y_k \\ Z_k \end{bmatrix}$$

d'autre part, on peut obtenir $\vec{x_k}, \vec{y_k}, \vec{z_k}$ en fonction de $\vec{x_i}, \vec{y_i}, \vec{z_i}$ à l'aide du produit matriciel suivant :

$$[\vec{x_k}\ ;\ \vec{y_k}\ ;\ \vec{z_k}] = [\vec{x_i}\ ;\ \vec{y_i}\ ;\ \vec{z_i}][P]$$

On peut alors écrire $\vec{W}$ sous la forme :

$$\overrightarrow{W} = [\overrightarrow{x_i}\ ;\ \overrightarrow{y_i}\ ;\ \overrightarrow{z_i}][P]\begin{bmatrix} X_k \\ Y_k \\ Z_k \end{bmatrix}$$

d’où :

$$[\overrightarrow{x_i}\ ;\ \overrightarrow{y_i}\ ;\ \overrightarrow{z_i}]\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} = [\overrightarrow{x_i}\ ;\ \overrightarrow{y_i}\ ;\ \overrightarrow{z_i}][P]\begin{bmatrix} X_k \\ Y_k \\ Z_k \end{bmatrix}$$

c’est-à-dire :

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} = [P]\begin{bmatrix} X_k \\ Y_k \\ Z_k \end{bmatrix}$$

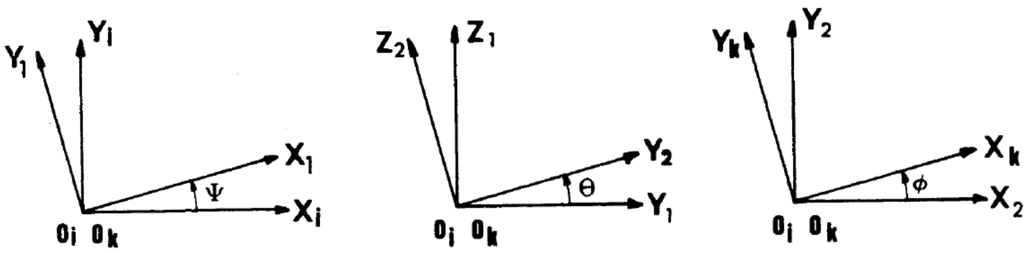
(Anciennes composantes) = (Nouvelle base exprimée dans l’ancienne) (Nouvelles composantes)

première colonne de [P] = composantes de $\overrightarrow{x_k}$ dans (R_i)

deuxième colonne de [P] = composantes de $\overrightarrow{y_k}$ dans (R_i)

troisième colonne de [P] = composantes de $\overrightarrow{z_k}$ dans (R_i)

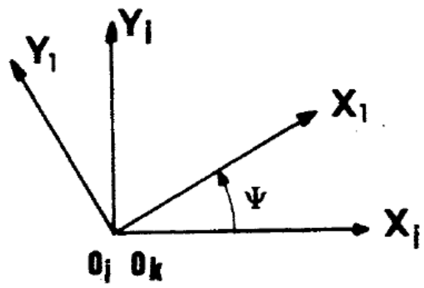
2°) Exemple 1 : Cas du repérage à l’aide des angles d’Euler et lorsque les repères sont consécutifs.



Le repérage à l'aide des angles d'Euler fait intervenir quatre repères (R_i), (R_1), (R_2), (R_k). Dans les différents repères le vecteur $\overrightarrow{W}$ s'écrit :

$$\overrightarrow{W} = \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix}_{R_i}\ ;\ \overrightarrow{W} = \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix}_{R_1}\ ;\ \overrightarrow{W} = \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix}_{R_2}\ ;\ \overrightarrow{W} = \begin{bmatrix} X_k \\ Y_k \\ Z_k \end{bmatrix}_{R_k}$$

- Matrices de passage de (R_i) vers (R_1) et de (R_1) vers (R_i) :



Les deux repères (R$_i$) et (R$_1$) ont $\overrightarrow{z_i}$ et $\overrightarrow{z_1}$ égaux

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} = [\psi] \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix}$$

première colonne de $[\psi]$ = composantes de $\overrightarrow{x_1}$ dans (R$_i$) : $\overrightarrow{x_1} = \begin{bmatrix} \cos\psi \\ \sin\psi \\ 0 \end{bmatrix}_{R_i}$

deuxième colonne de $[\psi]$ = composantes de $\overrightarrow{y_1}$ dans (R$_i$) : $\overrightarrow{y_1} = \begin{bmatrix} -\sin\psi \\ \cos\psi \\ 0 \end{bmatrix}_{R_i}$

troisième colonne de $[\psi]$ = composantes de $\overrightarrow{z_1}$ dans (R$_i$) : $\overrightarrow{z_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{R_i}$

Ce qui donne :

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix}$$

soit :

$$[\psi] = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice inverse : passage de (R$_1$) à (R$_i$)

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} = [\psi]^{-1} \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix}$$

pour calculer $[\psi]^{-1}$, on peut procéder de trois manières :

- calcul normal d'une matrice inverse : long et inutile
- la matrice $[\psi]$ est orthogonale, il suffit de prendre la matrice transposée car $[\psi]^{-1} = [\psi]^T$
- la transformation inverse d'une rotation d'angle ψ est la rotation d'angle $-\psi$: dans la matrice $[\psi]$, il suffit de remplacer ψ par $-\psi$.

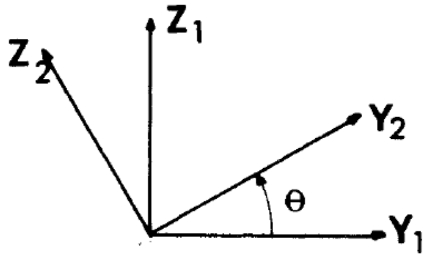
Finalement :

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix}$$

- Matrices de passage de (R$_1$) à (R$_2$) et de (R$_2$) à (R$_1$)

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} = [\theta] \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix}$$



première colonne de $[\theta]$ = composantes de $\overrightarrow{x_2}$ dans (R_1) : $\overrightarrow{x_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{R_1}$

deuxième colonne de $[\theta]$ = composantes de $\overrightarrow{y_2}$ dans (R_1) : $\overrightarrow{y_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}_{R_1}$

troisième colonne de $[\theta]$ = composantes de $\overrightarrow{z_2}$ dans (R_1) : $\overrightarrow{z_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}_{R_1}$

On a immédiatement la matrice de passage de (R_2) à (R_1)

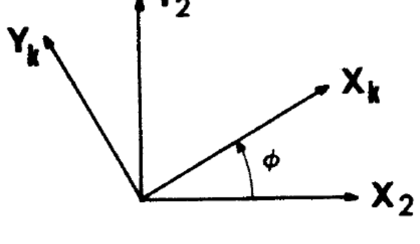
$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = [\theta]^{-1} \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix}$$

- Matrices de passage de (R_2) à (R_k) et de (R_k) à (R_2)

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_k \\ Y_k \\ Z_k \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = [\phi] \begin{bmatrix} X_k \\ Y_k \\ Z_k \end{bmatrix}$$



première colonne de $[\phi]$ = composantes de $\overrightarrow{x_k}$ dans (R_2) : $\overrightarrow{x_k} = \begin{bmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{bmatrix}_{R_2}$

deuxième colonne de $[\phi]$ = composantes de $\overrightarrow{y_k}$ dans (R_2) : $\overrightarrow{y_k} = \begin{bmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{bmatrix}_{R_2}$

troisième colonne de $[\phi]$ = composantes de $\overrightarrow{z_k}$ dans (R_2) : $\overrightarrow{z_k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{R_2}$

On a immédiatement la matrice de passage de (R_k) à (R_2)

$$\begin{bmatrix} X_k \\ Y_k \\ Z_k \end{bmatrix} = [\phi]^{-1} \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_k \\ Y_k \\ Z_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix}$$

3°) Exemple 2 : Cas du repérage à l'aide des angles d'Euler et lorsque les repères ne sont pas consécutifs.

- Matrices de passage de (R_i) à (R_2) et de (R_2) à (R_i)

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} = [\psi] \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} = [\theta] \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} = [\psi][\theta] \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi\cos\theta & \sin\psi\sin\theta \\ \sin\psi & \cos\psi\cos\theta & -\cos\psi\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix}$$

Le produit de deux matrices orthogonales est une matrice orthogonale. Par suite, pour avoir la matrice inverse de la matrice-produit ci-dessus, il suffit de prendre la matrice transposée et l'on aura ainsi la matrice de passage de (R_2) vers (R_i).

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi\cos\theta & \cos\psi\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\psi\sin\theta & -\cos\psi\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix}$$

- Matrices de passage de (R_i) à (R_k) et de (R_k) à (R_i)

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} = [\psi][\theta] \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_1 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = [\phi] \begin{bmatrix} X_k \\ Y_k \\ Z_k \end{bmatrix}$$

d'où

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} = [\psi][\theta][\phi] \begin{bmatrix} X_k \\ Y_k \\ Z_k \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi\cos\theta & \sin\psi\sin\theta \\ \sin\psi & \cos\psi\cos\theta & -\cos\psi\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_k \\ Y_k \\ Z_k \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\phi - \sin\psi\cos\theta\sin\phi & -\cos\psi\sin\phi - \sin\psi\cos\theta\cos\phi & \sin\psi\sin\theta \\ \sin\psi\cos\phi + \cos\psi\cos\theta\sin\phi & -\sin\psi\sin\phi + \cos\psi\cos\theta\cos\phi & -\cos\psi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\phi & \sin\theta\cos\phi & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_k \\ Y_k \\ Z_k \end{bmatrix}$$

La matrice de passage de (R_k) à (R_i) est donc :

$$\begin{bmatrix} X_k \\ Y_k \\ Z_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\phi - \sin\psi\cos\theta\sin\phi & \sin\psi\cos\phi + \cos\psi\cos\theta\sin\phi & \sin\theta\sin\phi \\ -\cos\psi\sin\phi - \sin\psi\cos\theta\cos\phi & -\sin\psi\sin\phi + \cos\psi\cos\theta\cos\phi & \sin\theta\cos\phi \\ \sin\psi\sin\theta & -\cos\psi\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix}$$

3. Cinématique du point matériel

3.1. Dérivation d'un vecteur

3.1.1. Fonction vectorielle

Si à toute valeur t d'un intervalle de (R) il correspond un vecteur libre $\vec{W}$ d'un ensemble de vecteur on dit que $\vec{W}$ est une fonction vectorielle de la variable t.

Par rapport au repère $R_i(O,\vec{x_i},\vec{y_i},\vec{z_i})$ les coordonnées Xi, Yi, Zi seront des fonctions de la variable t.

$$\vec{W}(t) = X_i(t)\,\vec{x_i} + Y_i(t)\,\vec{y_i} + Z_i(t)\,\vec{z_i}$$

3.1.2. Dérivée dans (R_i) de $\vec{W}$ exprimée dans (R_i)

a) Définition :

Soit une fonction vectorielle $\vec{W}(t)$ définie et continue dans l'intervalle [a, b]. On dit que $\vec{W}(t)$ est dérivable au point $t_0 \in [a,b]$ si

$$\frac{\vec{W}(t) - \vec{W}(t_0)}{t - t_0}$$

admet une limite quand $t \longrightarrow t_0$

En chaque point de l'intervalle [a,b] où cette dérivée est définie, se trouve définie une fonction vectorielle que l'on désigne par

