$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} = [\psi][\theta] \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_1 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = [\phi] \begin{bmatrix} X_k \\ Y_k \\ Z_k \end{bmatrix}$$

d'où

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} = [\psi][\theta][\phi] \begin{bmatrix} X_k \\ Y_k \\ Z_k \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi\cos\theta & \sin\psi\sin\theta \\ \sin\psi & \cos\psi\cos\theta & -\cos\psi\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_k \\ Y_k \\ Z_k \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\phi - \sin\psi\cos\theta\sin\phi & -\cos\psi\sin\phi - \sin\psi\cos\theta\cos\phi & \sin\psi\sin\theta \\ \sin\psi\cos\phi + \cos\psi\cos\theta\sin\phi & -\sin\psi\sin\phi + \cos\psi\cos\theta\cos\phi & -\cos\psi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\phi & \sin\theta\cos\phi & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_k \\ Y_k \\ Z_k \end{bmatrix}$$

La matrice de passage de (R_k) à (R_i) est donc :

$$\begin{bmatrix} X_k \\ Y_k \\ Z_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\phi - \sin\psi\cos\theta\sin\phi & \sin\psi\cos\phi + \cos\psi\cos\theta\sin\phi & \sin\theta\sin\phi \\ -\cos\psi\sin\phi - \sin\psi\cos\theta\cos\phi & -\sin\psi\sin\phi + \cos\psi\cos\theta\cos\phi & \sin\theta\cos\phi \\ \sin\psi\sin\theta & -\cos\psi\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix}$$

3. Cinématique du point matériel

3.1. Dérivation d'un vecteur

3.1.1. Fonction vectorielle

Si à toute valeur t d'un intervalle de R il correspond un vecteur libre $\vec{W}$ d'un ensemble de vecteurs, on dit que $\vec{W}$ est une fonction vectorielle de la variable t.

Par rapport au repère $R_i(O,\vec{x_i},\vec{y_i},\vec{z_i})$ les coordonnées X_i, Y_i, Z_i seront des fonctions de la variable t.

$$\vec{W}(t) = X_i(t)\,\vec{x_i} + Y_i(t)\,\vec{y_i} + Z_i(t)\,\vec{z_i}$$

3.1.2. Dérivée dans (R_i) de $\vec{W}$ exprimée dans (R_i)

a) Définition :

Soit une fonction vectorielle $\vec{W}(t)$ définie et continue dans l'intervalle [a, b]. On dit que $\vec{W}(t)$ est dérivable au point $t_0 \in [a,b]$ si

$$\frac{\vec{W}(t) - \vec{W}(t_0)}{t - t_0}$$

admet une limite quand $t \longrightarrow t_0$

En chaque point de l'intervalle [a,b] où cette dérivée est définie, se trouve définie une fonction vectorielle que l'on désigne par

$$\overrightarrow{W'}(t) = \frac{d\overrightarrow{W}(t)}{dt}$$

b) Propriétés :

la dérivée d'un vecteur instant est nulle

$$\frac{d\overrightarrow{W}}{dt} = \frac{du}{dt}\frac{d\overrightarrow{W}}{du}$$

$$\frac{d(\vec{u}+\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\frac{d(f.\overrightarrow{W})}{dt} = \frac{df}{dt}\overrightarrow{W} + f\frac{d\overrightarrow{W}}{dt}$$

$$\frac{d(\vec{u}.\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{u}}{dt}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\frac{d(\vec{u}\wedge\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{u}}{dt}\wedge\vec{v} + \vec{u}\wedge\frac{d\vec{v}}{dt}$$

c) Expression de la dérivée dans (R_i)

$$\overrightarrow{W}(t) = X_i(t)\,\overrightarrow{x_i} + Y_i(t)\,\overrightarrow{y_i} + Z_i(t)\,\overrightarrow{z_i}$$

$$\frac{d^i\overrightarrow{W}(t)}{t} = X'_i(t)\,\overrightarrow{x_i} + Y'_i(t)\,\overrightarrow{y_i} + Z'_i(t)\,\overrightarrow{z_i}$$

Théorème : le vecteur dérivée d'une fonction vectorielle $\overrightarrow{W}(t)$ a pour composantes sur la base $R_i(O,\overrightarrow{x_i},\overrightarrow{y_i},\overrightarrow{z_i})$ indépendante de t les dérivées des composantes de $\overrightarrow{W}(t)$.

3.1.3. Dérivée dans (R_i) de $\boldsymbol{\overrightarrow{W}(t)}$ exprimée dans le repère (R_k) tel que $\boldsymbol{\overrightarrow{x_k} = \overrightarrow{x_k}(t)}$, $\boldsymbol{\overrightarrow{y_k} = \overrightarrow{y_k}(t)}$, $\boldsymbol{\overrightarrow{z_k} = \overrightarrow{z_k}(t)}$

$$\overrightarrow{W}(t) = X_k\,\overrightarrow{x_k} + Y_k\,\overrightarrow{y_k} + Z_k\,\overrightarrow{z_k}$$

$$\frac{d^i\overrightarrow{W}(t)}{dt} = X'_k\,\overrightarrow{x_k} + Y'_k\,\overrightarrow{y_k} + Z'_k\,\overrightarrow{z_k} + X_k\frac{d^i\overrightarrow{x_k}}{dt} + Y_k\frac{d^i\overrightarrow{y_k}}{dt} + Z_k\frac{d^i\overrightarrow{z_k}}{dt}$$

$$\frac{d^i\overrightarrow{W}(t)}{dt} = \frac{d^k\overrightarrow{W}(t)}{dt} + X_k\frac{d^i\overrightarrow{x_k}}{dt} + Y_k\frac{d^i\overrightarrow{y_k}}{dt} + Z_k\frac{d^i\overrightarrow{z_k}}{dt}$$

a) Expression des dérivées des vecteurs unitaires lorsqu'on emploi un repère orthonormé

D'une part, nous avons

$$\begin{cases} x_k^2 = 1 \\ y_k^2 = 1 \\ z_k^2 = 1 \end{cases}$$

La dérivation dans (R_i) de ces formules donne

$$\frac{d^i x_k^2}{dt} = 2.\overrightarrow{x_k}.\frac{d^i\overrightarrow{x_k}}{dt} = 0$$

$$\overrightarrow{x_k}.\frac{d^i\overrightarrow{x_k}}{dt} = 0 \Rightarrow \begin{cases} Soit\ \dfrac{d^i\overrightarrow{x_k}}{dt} = 0 \\ Soit\ \dfrac{d^i\overrightarrow{x_k}}{dt} \perp \overrightarrow{x_k} \end{cases}$$

Comme $\overrightarrow{x_k}$ n'est pas un vecteur fixe, la seule possibilité est $\frac{d^i\overrightarrow{x_k}}{dt}$ perpendiculaire à $\overrightarrow{x_k}$

De même les vecteurs $\frac{d^i\overrightarrow{y_k}}{dt}$ et $\frac{d^i\overrightarrow{z_k}}{dt}$ sont perpendiculaire respectivement à $\overrightarrow{y_k}$ et $\overrightarrow{z_k}$

On peut donc écrire :

$$\frac{d^i\overrightarrow{x_k}}{dt} = 0 + a_{12}\overrightarrow{y_k} + a_{13}\overrightarrow{z_k}$$

$$\frac{d^i\overrightarrow{y_k}}{dt} = a_{21}\overrightarrow{x_k} + 0 + a_{23}\overrightarrow{z_k}$$

$$\frac{d^i\overrightarrow{z_k}}{dt} = a_{31}\overrightarrow{x_k} + a_{32}\overrightarrow{y_k} + 0$$

Soit

$$\boxed{a_{ij} = 0, lorque\ i = j}$$

D'autre part, nous savons que :

$$\begin{cases} \overrightarrow{x_k} \cdot \overrightarrow{y_k} = 0 \\ \overrightarrow{y_k} \cdot \overrightarrow{z_k} = 0 \\ \overrightarrow{z_k} \cdot \overrightarrow{x_k} = 0 \end{cases}$$

La dérivation dans (R_i) de ces formules donne

$$\frac{d^i\overrightarrow{x_k}}{dt} \cdot \overrightarrow{y_k} + \overrightarrow{x_k} \cdot \frac{d^i\overrightarrow{y_k}}{dt} = 0$$

$$(a_{12}\overrightarrow{y_k} + a_{13}\overrightarrow{z_k}) \cdot \overrightarrow{y_k} + \overrightarrow{x_k} \cdot (a_{21}\overrightarrow{x_k} + a_{23}\overrightarrow{z_k}) = 0$$

$$a_{12} + a_{21} = 0 \Rightarrow a_{21} = -a_{12}$$

de même, en dérivant les deux autres équations, nous obtenons

$$a_{23} + a_{32} = 0 \Rightarrow a_{32} = -a_{23}$$

$$a_{31} + a_{13} = 0 \Rightarrow a_{13} = -a_{31}$$

Soit :

$$\boxed{a_{ij} + a_{ji} = 0, lorque\ i \neq j}$$

On a donc uniquement besoin de trois coefficients pour définir les dérivées :

$$\frac{d^i\overrightarrow{x_k}}{dt} = 0 + a_{12}\overrightarrow{y_k} - a_{31}\overrightarrow{z_k}$$

$$\frac{d^i\overrightarrow{y_k}}{dt} = -a_{12}\overrightarrow{x_k} + 0 + a_{23}\overrightarrow{z_k}$$

$$\frac{d^i\overrightarrow{z_k}}{dt} = a_{31}\overrightarrow{x_k} - a_{23}\overrightarrow{y_k} + 0$$

On définit ainsi une matrice antisymétrique :

$$[\Omega] = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & -a_{31} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & -a_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

On constate d'autre part que l'on a :

$$\frac{d^i\overrightarrow{x_k}}{dt} = [\Omega]\overrightarrow{x_k}$$

$$\frac{d^i\overrightarrow{y_k}}{dt} = [\Omega]\overrightarrow{y_k}$$

$$\frac{d^i\overrightarrow{z_k}}{dt} = [\Omega]\overrightarrow{z_k}$$

La matrice $[\Omega]$ étant antisymétrique, on peut représenter ces dérivées par un produit vectoriel :

$$\frac{d^i\overrightarrow{x_k}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{x_k}$$

$$\frac{d^i\overrightarrow{y_k}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{y_k}$$

$$\frac{d^i\overrightarrow{z_k}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{z_k}$$

Pour identifier ce vecteur $\vec{\Omega}$ posons

$$\vec{\Omega} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

Les trois équations précédentes s'écrivent alors :

$$\frac{d^i\overrightarrow{x_k}}{dt} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r \\ -q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ a_{12} \\ -a_{31} \end{bmatrix}$$

$$\frac{d^i\overrightarrow{y_k}}{dt} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r \\ 0 \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{12} \\ 0 \\ a_{23} \end{bmatrix}$$

$$\frac{d^i\overrightarrow{z_k}}{dt} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q \\ -p \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{31} \\ -a_{23} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Par identification, nous avons

$$p = a_{23}$$

$$q = a_{31}$$

$$r = a_{12}$$

Convention pour le vecteur $\vec{\Omega}$ ainsi défini :

Le vecteur $\vec{\Omega}$ est appelé vecteur rotation du trièdre (R_k) par rapport au trièdre (R_i). Conventionnellement on le note : $\vec{\Omega}_k^i$

indice du bas : ce qui est repéré

indice du haut : le repère de référence

b) Formule fondamentale de la dérivation

Reprenons la formule précédente :

$$\frac{d^i\vec{W}(t)}{dt} = \frac{d^k\vec{W}(t)}{dt} + X_k\frac{d^i x_k}{dt} + Y_k\frac{d^i y_k}{dt} + Z_k\frac{d^i z_k}{dt}$$

$$\frac{d^i\vec{W}(t)}{dt} = \frac{d^k\vec{W}(t)}{dt} + X_k.\vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{x_k} + Y_k.\vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{y_k} + Z_k.\vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{z_k}$$

$$\frac{d^i\vec{W}(t)}{dt} = \frac{d^k\vec{W}(t)}{dt} + \vec{\Omega}_k^i \wedge (X_k\overrightarrow{x_k} + Y_k\overrightarrow{y_k} + Z_k\overrightarrow{z_k})$$

$$\boxed{\frac{d^i\vec{W}(t)}{dt} = \frac{d^k\vec{W}(t)}{dt} + \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{W}(t)}$$

c) Propriétés du vecteur $\vec{\Omega}_k^i$:

1°) Le vecteur $\vec{\Omega}_k^i$ est antisymétrique par rapport aux indices

$$\frac{d^i\vec{W}(t)}{dt} = \frac{d^k\vec{W}(t)}{dt} + \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{W}(t)$$

$$\frac{d^k\vec{W}(t)}{dt} = \frac{d^i\vec{W}(t)}{dt} + \vec{\Omega}_i^k \wedge \vec{W}(t)$$

La somme de ces deux équations donne :

$$\frac{d^k\vec{W}(t)}{dt} + \frac{d^i\vec{W}(t)}{dt} = \frac{d^i\vec{W}(t)}{dt} + \frac{d^k\vec{W}(t)}{dt} + \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{W}(t) + \vec{\Omega}_i^k \wedge \vec{W}(t)$$

$$0 = \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{W}(t) + \vec{\Omega}_i^k \wedge \vec{W}(t)$$

$$0 = \left(\vec{\Omega}_k^i + \vec{\Omega}_i^k\right) \wedge \vec{W}(t)$$

$$\vec{\Omega}_k^i + \vec{\Omega}_i^k = 0$$

$$\boxed{\vec{\Omega}_k^i = -\vec{\Omega}_i^k}$$

2°) Formule Chasles

Soient trois repères (R_i), (R_j) et (R_k)

$$\frac{d^i\vec{W}(t)}{dt} = \frac{d^k\vec{W}(t)}{dt} + \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{W}(t)$$

$$\frac{d^k\vec{W}(t)}{dt} = \frac{d^j\vec{W}(t)}{dt} + \vec{\Omega}_j^k \wedge \vec{W}(t)$$

$$\frac{d^j\vec{W}(t)}{dt} = \frac{d^i\vec{W}(t)}{dt} + \vec{\Omega}_i^j \wedge \vec{W}(t)$$

En faisant la somme membre à membre, nous obtenons

$$0 = \left(\vec{\Omega}_k^i + \vec{\Omega}_j^k + \vec{\Omega}_i^j\right) \wedge \vec{W}(t)$$

Soit

$$\vec{\Omega}_k^i + \vec{\Omega}_j^k + \vec{\Omega}_i^j = 0$$

$$\vec{\Omega}_i^j = -\vec{\Omega}_k^i - \vec{\Omega}_j^k$$

$$\boxed{\vec{\Omega}_i^j = \vec{\Omega}_i^k + \vec{\Omega}_k^j}$$

Cette formule est analogue à la formule de Chasles : $\vec{IJ} = \vec{IK} + \vec{KJ}$

3°) La dérivée de $\vec{\Omega}_k^i$ est la même dans (R_k) et dans (R_i)

$$\frac{d^i\vec{\Omega}_k^i}{dt} = \frac{d^k\vec{\Omega}_k^i}{dt} + \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{\Omega}_k^i$$

d'où

$$\boxed{\frac{d^i\vec{\Omega}_k^i}{dt} = \frac{d^k\vec{\Omega}_k^i}{dt}}$$

3.2. Composition des vitesses et des accélérations

3.2.1. Définition du vecteur vitesse et du vecteur accélération de M

a) Vecteur vitesse au point M

On appelle vecteur vitesse de M dans (R_i) le vecteur :

$$\vec{V}^i(M) = \frac{d^i}{dt}\overrightarrow{O_\imath M}$$

Dans (R_i,) on a :

$$\overrightarrow{O_\imath M} = X_i\,\vec{x_\imath} + Y_i\,\vec{y_\imath} + Z_i\,\vec{z_\imath}$$

$$\boxed{\vec{V}^i(M) = X'_i\,\vec{x_\imath} + Y'_i\,\vec{y_\imath} + Z'_i\,\vec{z_\imath}}$$

b) Vecteur accélération

On appelle vecteur accélération de M dans (R_i) le vecteur :

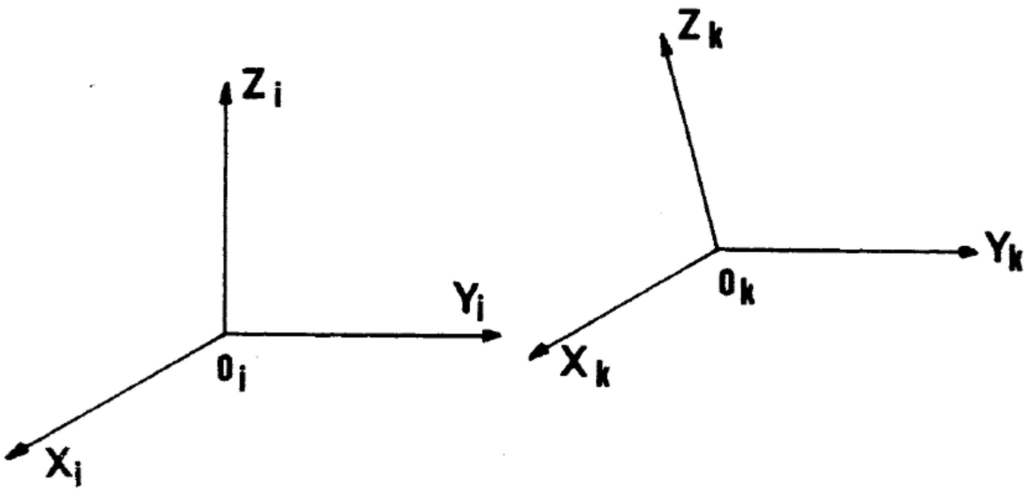
$$\vec{\Gamma}^i(M) = \frac{d^i}{dt}\vec{V}^i(M)$$

Dans (R_i), on a :

$$\boxed{\vec{\Gamma}^i(M) = X''_i\,\vec{x_\imath} + Y''_i\,\vec{y_\imath} + Z''_i\,\vec{z_\imath}}$$

3.2.2. Composition des vitesses et des accélérations

Considérons les deux repères (R_i) et (R_k), on peut envisager le mouvement de M pour un observateur lié à (R_i) et pour un observateur lié à (R_k) et chercher les relations entre les éléments cinématiques observés par l'observateur lié à (R_i) et par celui lié à (R_k)



On a :

$$\overrightarrow{O_\imath M} = \overrightarrow{O_\imath O_k} + \overrightarrow{O_k M}$$

On peut repérer M dans (R_i) et (R_k) par ses composantes

$$\overrightarrow{O_\imath M} = \overrightarrow{O_\imath O_k} + X_k\,\vec{x_k} + Y_k\,\vec{y_k} + Z_k\,\vec{z_k}$$

3.2.3. Composition des vitesses

a) Formule générale

$$\overrightarrow{O_iM} = \overrightarrow{O_iO_k} + \overrightarrow{O_kM}$$

$$\vec{V}^i(M) = \frac{d^i}{dt}\overrightarrow{O_iM}$$

$$\vec{V}^i(M) = \frac{d^i}{dt}\overrightarrow{O_iO_k} + \frac{d^i}{dt}\overrightarrow{O_kM}$$

D'après la formule fondamentale de la dérivation :

$$\frac{d^i}{dt}\overrightarrow{O_kM} = \frac{d^k}{dt}\overrightarrow{O_kM} + \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_kM}$$

$$\vec{V}^i(M) - \vec{V}^i(O_k) = \vec{V}^k(M) + \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_kM}$$

$$\vec{V}^i(M) = \vec{V}^k(M) + \vec{V}^i(O_k) + \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_kM}$$

b) Formule fondamentale de la cinématique du solide

Soit M un point appartenant au solide k sur lequel est lié le repère (R_k), on a alors

$$\vec{V}^k(M_k) = 0$$

On obtient alors La formule de la vitesse d'un point appartenant à un solide

$$\vec{V}^i(M_k) = \vec{V}^i(O_k) + \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_kM_k}$$

Le point O_k ne joue aucun rôle particulier dans la formule, on est pas tenu d'utiliser l'origine du repère lié au solide k. En effet, soient A et B deux points liés à (R_k)

$$\vec{V}^i(A) = \vec{V}^i(O_k) + \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_kA}$$

$$\vec{V}^i(B) = \vec{V}^i(O_k) + \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_kB}$$

en retranchant membre à membre, on obtient

$$\boxed{\vec{V}^i(B) = \vec{V}^i(A) + \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{AB}}$$

c) Reformulation de la formule générale

$$\vec{V}^i(M) = \vec{V}^k(M) + \vec{V}^i(O_k) + \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_kM}$$

Considérons à l'instant t le point appartenant à (R_k) et qui coïncide avec le point M; Nous l'appellerons point coïncidant. Nous noterons son vecteur vitesse par $\vec{V}_k^i(M)$ et l'on a :

$$\vec{V}_k^i(M) = \vec{V}^i(O_k) + \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_kM}$$

et la formule générale devient :

$$\boxed{\vec{V}^i(M) = \vec{V}^k(M) + \vec{V}_k^i(M)}$$

On emploi souvent le langage imagé suivant :

$$\vec{V}_r = \vec{V}^k(M)\,; \qquad \vec{V}_a = \vec{V}^i(M)\,; \qquad \vec{V}_e = \vec{V}_k^i(M)$$

$\vec{V}_r$ (Vitesse relative) : vitesse du point M pour un observateur lié à (R_k)

$\vec{V}_a$ (Vitesse absolue) : vitesse du point M pour un observateur lié à (R_i)

$\vec{V}_e$ (Vitesse du point coïncident ou vitesse d'entrainement) : vitesse du point appartenant au repère (R_k) et qui coïncide à l'instant t avec le point M.

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e$$

d) Propriétés du vecteur $\vec{V}_k^i(M)$

1°) $\vec{V}_k^i(M)$ est antisymétrique par rapport aux indices

$$\vec{V}^i(M) = \vec{V}^k(M) + \vec{V}_k^i(M)$$

$$\vec{V}^k(M) = \vec{V}^i(M) + \vec{V}_i^k(M)$$

$$\vec{V}_k^i(M) + \vec{V}_i^k(M) = 0$$

Donc

$$\vec{V}_k^i(M) = -\vec{V}_i^k(M)$$

2°) Formule de Chasles

$$\vec{V}^i(M) = \vec{V}^k(M) + \vec{V}_k^i(M)$$

$$\vec{V}^j(M) = \vec{V}^i(M) + \vec{V}_i^j(M)$$

$$\vec{V}^k(M) = \vec{V}^j(M) + \vec{V}_j^k(M)$$

La somme membre à membre donne

$$\vec{V}^i(M) + \vec{V}^j(M) + \vec{V}^k(M) = \vec{V}^i(M) + \vec{V}^j(M) + \vec{V}^k(M) + \vec{V}_k^i(M) + \vec{V}_i^j(M) + \vec{V}_j^k(M)$$

$$0 = \vec{V}_k^i(M) + \vec{V}_i^j(M) + \vec{V}_j^k(M)$$

$$\boxed{\vec{V}_i^k(M) = \vec{V}_i^j(M) + \vec{V}_j^k(M)}$$

3.2.4. Composition des accélérations

a) **Formule générale**

La formule générale donnant le vecteur vitesse s'écrit

$$\vec{V}^i(M) = \vec{V}^k(M) + \vec{V}^i(O_k) + \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_k M}$$

$$\vec{\Gamma}^i(M) = \frac{d^i}{dt}\vec{V}^k(M) + \frac{d^i}{dt}\vec{V}^i(O_k) + \frac{d^i}{dt}\vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_k M} + \vec{\Omega}_k^i \wedge \frac{d^i}{dt}\overrightarrow{O_k M}$$

On sait que :

$$\frac{d^i}{dt}\vec{V}^k(M) = \frac{d^k}{dt}\vec{V}^k(M) + \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{V}^k(M)$$

$$\frac{d^i}{dt}\vec{V}^k(M) = \vec{\Gamma}^k(M) + \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{V}^k(M)$$

et

$$\frac{d^i}{dt}\overrightarrow{O_kM} = \frac{d^k}{dt}\overrightarrow{O_kM} + \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_kM}$$

$$\frac{d^i}{dt}\overrightarrow{O_kM} = \vec{V}^k(M) + \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_kM}$$

Ce qui donne

$$\vec{\Gamma}^i(M) = \vec{\Gamma}^k(M) + \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{V}^k(M) + \frac{d^i}{dt}\vec{V}^i(O_k) + \frac{d^i}{dt}\vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_kM} + \vec{\Omega}_k^i \wedge \left(\vec{V}^k(M) + \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_kM}\right)$$

$$\vec{\Gamma}^i(M) = \vec{\Gamma}^k(M) + \vec{\Gamma}^i(O_k) + \frac{d^i}{dt}\vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_kM} + \vec{\Omega}_k^i \wedge \left(\vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_kM}\right) + 2\left(\vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{V}^k(M)\right)$$

b) **Accélération d'un point d'un solide**

Soit M un point appartenant au solide k sur lequel est lié le repère (R_k), on a alors

$$\vec{V}^k(M_k) = 0$$

$$\vec{\Gamma}^k(M_k) = 0$$

La formule précédente devient alors

$$\vec{\Gamma}^i(M_k) = \Gamma^i(O_k) + \frac{d^i}{dt}\vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_kM_k} + \vec{\Omega}_k^i \wedge \left(\vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_kM_k}\right)$$

Il est bien évident que le point O_k, ne joue aucun rôle particulier.

Soient A et B deux points appartenant au solide k

$$\vec{\Gamma}^i(A) = \vec{\Gamma}^i(O_k) + \frac{d^i}{dt}\vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_kA} + \vec{\Omega}_k^i \wedge \left(\vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_kA}\right)$$

$$\vec{\Gamma}^i(B) = \vec{\Gamma}^i(O_k) + \frac{d^i}{dt}\vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_kB} + \vec{\Omega}_k^i \wedge \left(\vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_kB}\right)$$

$$\vec{\Gamma}^i(B) - \vec{\Gamma}^i(A) = \frac{d^i}{dt}\vec{\Omega}_k^i \wedge \left(\overrightarrow{O_kB} - \overrightarrow{O_kA}\right) + \vec{\Omega}_k^i \wedge \left(\vec{\Omega}_k^i \wedge \left(\overrightarrow{O_kB} - \overrightarrow{O_kA}\right)\right)$$

$$\boxed{\vec{\Gamma}^i(B) = \vec{\Gamma}^i(A) + \frac{d^i}{dt}\vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\Omega}_k^i \wedge \left(\vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{AB}\right)}$$

c) Reformulation de la formule générale

Considérons à l'instant t le point appartenant à (R_k), et qui coïncide avec le point M. Nous noterons son accélération par $\vec{\Gamma}_k^i(M)$. D'après la formule générale nous avons à l'instant t :

$$\vec{\Gamma}_k^i(M) = \vec{\Gamma}^i(O_k) + \frac{d^i}{dt}\vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_kM} + \vec{\Omega}_k^i \wedge \left(\vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_kM}\right)$$

Reprenons la formule générale précédente

$$\vec{\Gamma}^i(M) = \vec{\Gamma}^k(M) + \vec{\Gamma}^i(O_k) + \frac{d^i}{dt}\vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_kM} + \vec{\Omega}_k^i \wedge \left(\vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_kM}\right) + 2\left(\vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{V}^k(M)\right)$$

En remplaçant $\vec{\Gamma}_k^i(M)$ par son expression, on obtient la formule générale :

$$\boxed{\vec{\Gamma}^i(M) = \vec{\Gamma}^k(M) + \vec{\Gamma}_k^i(M) + 2\left(\vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{V}^k(M)\right)}$$

On emploi souvent le langage imagé suivant :

$$\vec{\Gamma}_r = \vec{\Gamma}^k(M)\,; \qquad \vec{\Gamma}_a = \vec{\Gamma}^i(M)\,; \qquad \vec{\Gamma}_e = \vec{\Gamma}_k^i(M)\,; \qquad \vec{\Gamma}_c = 2\left(\vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{V}^k(M)\right)$$

$\vec{\Gamma}_r$ (Accélération relative) : accélération du point M pour un observateur lié à (R_k)

$\vec{\Gamma}_a$ (Accélération absolue) : accélération du point M pour un observateur lié à (R_i)

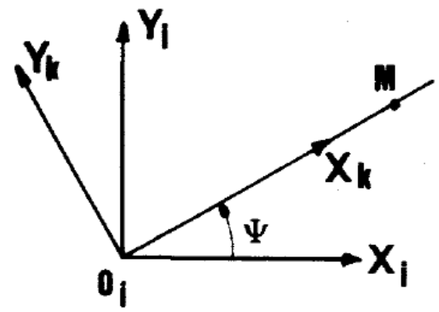
$\vec{\Gamma}_e$ (Accélération d'entrainement) : C'est l'accélération pour un observateur lié à (R_i) du point M_k appartenant à (R_k) et qui coïncide à l'instant t avec le point M.

$\vec{\Gamma}_c$: c'est une accélération complémentaire

$$\vec{\Gamma}_a = \vec{\Gamma}_r + \vec{\Gamma}_e + \vec{\Gamma}_c$$

3.2.5. Expression de la vitesse et de l'accélération d'un point en employant des systèmes de coordonnées particuliers

a) Coordonnées polaires planes



$$\psi = (\overrightarrow{x_i}, \overrightarrow{x_k}), \qquad \overrightarrow{z_k} = \overrightarrow{z_i}\,, \qquad \overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{x_k}$$

- Expression de la vitesse $\vec{V}^i(M)$

$$\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{x_k}$$

$$\overrightarrow{OM} = \rho\cos\psi\,\overrightarrow{x_\iota} + \rho\sin\psi\,\overrightarrow{y_\iota}$$

$$\vec{V}^i(M) = \frac{d^i}{dt}\overrightarrow{OM} = \rho'(\cos\psi\,\overrightarrow{x_\iota} + \sin\psi\,\overrightarrow{y_\iota}) + \rho\psi'(-\sin\psi\,\overrightarrow{x_\iota} + \cos\psi\,\overrightarrow{y_\iota})$$

$$\vec{V}^i(M) = \rho'\overrightarrow{x_k} + \rho\psi'\overrightarrow{y_k}$$

L'expression de $\vec{V}^i(M)$ dans (R_i) et (R_k) est donc :

$$\vec{V}^i(M) = \begin{bmatrix}\rho'\cos\psi - \rho\psi'\sin\psi\\ \rho'\sin\psi + \rho\psi'\cos\psi\\ 0\end{bmatrix}_{R_i} \qquad \text{et} \qquad \vec{V}^i(M) = \begin{bmatrix}\rho'\\ \rho\psi'\\ 0\end{bmatrix}_{R_k}$$

Ces résultats peuvent être retrouvés par l'utilisation de la formule de composition des vitesses.

- Expression de l'accélération $\vec{\Gamma}^i(M)$ dans (R_i)

$$\vec{V}^i(M) = (\rho'\cos\psi - \rho\psi'\sin\psi)\overrightarrow{x_\iota} + (\rho'\sin\psi + \rho\psi'\cos\psi)\overrightarrow{y_\iota}$$

$$\begin{aligned}\vec{\Gamma}^i(M) = (\rho''\cos\psi - \rho'\psi'\sin\psi - \rho'\psi'\sin\psi - \rho\psi''\sin\psi - \rho\psi'^2\cos\psi)\overrightarrow{x_\iota}\\ + (\rho''\sin\psi + \rho'\psi'\cos\psi + \rho'\psi'\cos\psi + \rho\psi''\cos\psi - \rho\psi'^2\sin\psi)\overrightarrow{y_\iota}\end{aligned}$$

$$\vec{\Gamma}^i(M) = \begin{bmatrix}\rho''\cos\psi - 2\rho'\psi'\sin\psi - \rho\psi''\sin\psi - \rho\psi'^2\cos\psi\\ \rho''\sin\psi + 2\rho'\psi'\cos\psi + \rho\psi''\cos\psi - \rho\psi'^2\sin\psi\\ 0\end{bmatrix}_{R_i}$$

- Expression de l'accélération $\vec{\Gamma}^i(M)$ dans (R_k)

On peut utiliser la formule de composition des accélérations dans (R_i) et (R_k)

$$\vec{\Gamma}^i(M) = \vec{\Gamma}^k(M) + \vec{\Gamma}^i_k(M) + 2\left(\vec{\Omega}^i_k \wedge \vec{V}^k(M)\right)$$

Calcul de $\vec{\Gamma}^k(M)$

$$\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{x_k}$$

$$\vec{\Gamma}^k(M) = \rho''\overrightarrow{x_k}$$

Calcul de $\vec{\Gamma}^i_k(M)$

$$\vec{\Gamma}^i_k(M) = \vec{\Gamma}^i(O_k) + \frac{d^i}{dt}\vec{\Omega}^i_k \wedge \overrightarrow{O_kM} + \vec{\Omega}^i_k \wedge \left(\vec{\Omega}^i_k \wedge \overrightarrow{O_kM}\right)$$

$$\vec{\Gamma}^i_k(M) = 0 + \frac{d^i}{dt}\vec{\Omega}^i_k \wedge \overrightarrow{O_kM} + \vec{\Omega}^i_k \wedge \left(\vec{\Omega}^i_k \wedge \overrightarrow{O_kM}\right)$$

Sachant que

$$\vec{\Omega}^i_k = \psi'\overrightarrow{z_k}$$

Ce qui donne

$$\vec{\Gamma}_k^i(M) = \psi''\overrightarrow{z_k} \wedge \rho\overrightarrow{x_k} + \psi'\overrightarrow{z_k} \wedge (\psi'\overrightarrow{z_k} \wedge \rho\overrightarrow{x_k})$$

$$\vec{\Gamma}_k^i(M) = \rho\psi''\overrightarrow{y_k} - \rho\psi'^2\overrightarrow{x_k}$$

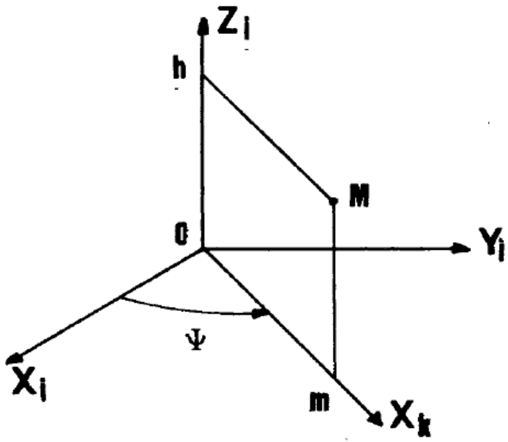
L'expression de $\vec{\Gamma}^i(M)$ devient

$$\vec{\Gamma}^i(M) = \rho''\overrightarrow{x_k} + \rho\psi''\overrightarrow{y_k} - \rho\psi'^2\overrightarrow{x_k} + 2(\psi'\overrightarrow{z_k} \wedge \rho'\overrightarrow{x_k})$$

$$\vec{\Gamma}^i(M) = \rho''\overrightarrow{x_k} + \rho\psi''\overrightarrow{y_k} - \rho\psi'^2\overrightarrow{x_k} + 2\rho'\psi'\overrightarrow{y_k}$$

$$\boxed{\vec{\Gamma}^i(M) = (\rho'' - \rho\psi'^2)\overrightarrow{x_k} + (\rho\psi'' + 2\rho'\psi')\overrightarrow{y_k}}$$

b) Coordonnées cylindriques



$$\|Om\| = \rho\ ; \quad \psi = (\overrightarrow{x_i}, \overrightarrow{x_k}), \quad \overrightarrow{z_k} = \overrightarrow{z_i}\ ; \quad \overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{x_k} + z\overrightarrow{z_k}$$

- Expression de la vitesse $\vec{V}^i(M)$

$$\vec{V}^i(M) = \vec{V}^k(M) + \vec{V}_k^i(M)$$

$$\vec{V}^k(M) = \frac{d^k}{dt}\overrightarrow{OM} = \rho'\overrightarrow{x_k} + z'\overrightarrow{z_k}$$

$$\vec{V}_k^i(M) = \vec{V}^i(O_k) + \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_kM}$$

$$\vec{V}_k^i(M) = \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_kM} = \psi'\overrightarrow{z_k} \wedge \rho\overrightarrow{x_k}$$

$$\vec{V}_k^i(M) = \rho\psi'\overrightarrow{y_k}$$

Finalement

$$\vec{V}^i(M) = \rho'\overrightarrow{x_k} + \rho\psi'\overrightarrow{y_k} + z'\overrightarrow{z_k}$$

$$\vec{V}^i(M) = \begin{bmatrix} \rho' \\ \rho\psi' \\ z' \end{bmatrix}_{R_k}$$

- Expression de l'accélération $\vec{\Gamma}^i(M)$ dans (R_k)

On peut utiliser la formule de composition des accélérations dans (R_i) et (R_k)

$$\vec{\Gamma}^i(M) = \vec{\Gamma}^k(M) + \vec{\Gamma}_k^i(M) + 2\left(\vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{V}^k(M)\right)$$

Calcul de $\vec{\Gamma}^k(M)$

$$\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{x_k} + z\overrightarrow{z_k}$$

$$\vec{\Gamma}^k(M) = \rho''\overrightarrow{x_k} + z''\overrightarrow{z_k}$$

Calcul de $\vec{\Gamma}_k^i(M)$

$$\vec{V}_k^i(M) = \rho\psi'\overrightarrow{y_k}$$

$$\vec{\Gamma}_k^i(M) = \frac{d}{dt}\vec{V}_k^i(M) = \rho\psi''\overrightarrow{y_k} + \rho\psi'\frac{d}{dt}\overrightarrow{y_k}$$

$$\vec{\Gamma}_k^i(M) = -\rho\psi'^2\overrightarrow{x_k} + \rho\psi''\overrightarrow{y_k}$$

Sachant que

$$\vec{\Omega}_k^i = \psi'\overrightarrow{z_k} \qquad \text{et} \qquad \vec{V}^k(M) = \rho'\overrightarrow{x_k} + z'\overrightarrow{z_k}$$

L'expression de $\vec{\Gamma}^i(M)$ devient

$$\vec{\Gamma}^i(M) = \rho''\overrightarrow{x_k} + z''\overrightarrow{z_k} - \rho\psi'^2\overrightarrow{x_k} + \rho\psi''\overrightarrow{y_k} + 2\left(\psi'\overrightarrow{z_k} \wedge (\rho'\overrightarrow{x_k} + z'\overrightarrow{z_k})\right)$$

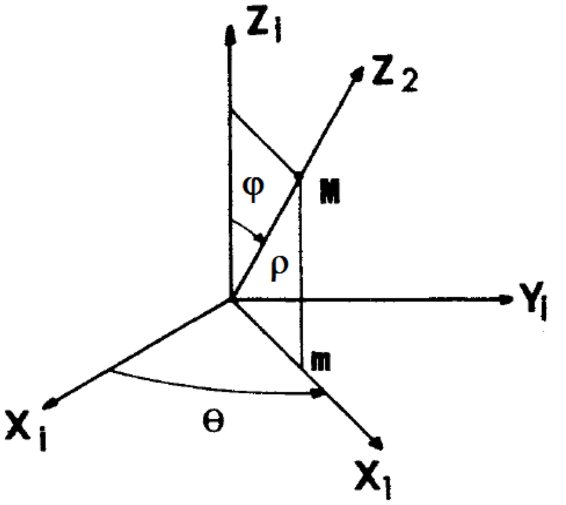
$$\vec{\Gamma}^i(M) = \rho''\overrightarrow{x_k} + z''\overrightarrow{z_k} - \rho\psi'^2\overrightarrow{x_k} + \rho\psi''\overrightarrow{y_k} + 2\rho'\psi'\overrightarrow{y_k}$$

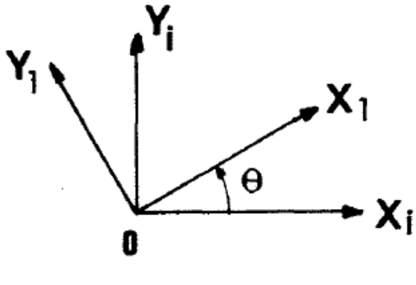
$$\boxed{\vec{\Gamma}^i(M) = (\rho'' - \rho\psi'^2)\overrightarrow{x_k} + (\rho\psi'' + 2\rho'\psi')\overrightarrow{y_k} + z''\overrightarrow{z_k}}$$

$$\vec{\Gamma}^i(M) = \begin{bmatrix} \rho'' - \rho\psi'^2 \\ \rho\psi'' + 2\rho'\psi' \\ z'' \end{bmatrix}_{R_k}$$

c) Coordonnées sphériques

Pour la commodité des calculs on construit deux repères (R_1) et (R_2) tels que





$$\|\overrightarrow{OM}\| = \rho\,; \qquad \theta = (\overrightarrow{x_i}, \overrightarrow{x_1}), \qquad \varphi = (\overrightarrow{z_i}, \overrightarrow{z_2})\,;$$

$$\overrightarrow{OM} = \rho \sin\varphi \cos\theta\, \overrightarrow{x_i} + \rho \sin\varphi \sin\theta\, \overrightarrow{y_i} + \rho\cos\varphi\, \overrightarrow{z_i}$$

$$\overrightarrow{OM} = \rho \sin\varphi\, \overrightarrow{x_1} + \rho\cos\varphi\, \overrightarrow{z_1}$$

$$\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{z_2}$$

- Expression de la vitesse $\vec{V}^i(M)$

$$\vec{V}^i(M) = \vec{V}^1(M) + \vec{V}_1^i(M)$$

$$\vec{V}^1(M) = \frac{d^1}{dt}\overrightarrow{OM} = (\rho' \sin\varphi + \rho\varphi' \cos\varphi)\overrightarrow{x_1} + (\rho'\cos\varphi - \rho\varphi'\sin\varphi)\overrightarrow{z_1}$$

$$\vec{V}_1^i(M) = \vec{V}^i(O_1) + \vec{\Omega}_1^i \wedge \overrightarrow{O_1M}$$

$$\vec{V}_1^i(M) = 0 + \theta'\overrightarrow{z_1} \wedge (\rho\sin\varphi\,\overrightarrow{x_1} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{z_1})$$

$$\vec{V}_1^i(M) = \rho\theta'\sin\varphi\,\overrightarrow{z_1}\wedge\overrightarrow{x_1} + \rho\theta'\cos\varphi\,\overrightarrow{z_1}\wedge\overrightarrow{z_1}$$

$$\vec{V}_1^i(M) = \rho\theta'\sin\varphi\,\overrightarrow{y_1}$$

Finalement

$$\boxed{\vec{V}^i(M) = (\rho' \sin\varphi + \rho\varphi' \cos\varphi)\overrightarrow{x_1} + \rho\theta'\sin\varphi\,\overrightarrow{y_1} + (\rho'\cos\varphi - \rho\varphi'\sin\varphi)\overrightarrow{z_1}}$$

$$\vec{V}^i(M) = \begin{bmatrix} \rho'\sin\varphi + \rho\varphi'\cos\varphi \\ \rho\theta'\sin\varphi \\ \rho'\cos\varphi - \rho\varphi'\sin\varphi \end{bmatrix}_{R_1}$$

- Expression de l'accélération $\vec{\Gamma}^i(M)$

On peut utiliser la formule de composition des accélérations dans (R_i) et (R_1)

$$\vec{\Gamma}^i(M) = \vec{\Gamma}^1(M) + \vec{\Gamma}_1^i(M) + 2\left(\vec{\Omega}_1^i \wedge \vec{V}^1(M)\right)$$

Calcul de $\vec{\Gamma}^1(M)$

$$\vec{V}^1(M) = (\rho' \sin\varphi + \rho\varphi' \cos\varphi)\overrightarrow{x_1} + (\rho'\cos\varphi - \rho\varphi'\sin\varphi)\overrightarrow{z_1}$$

$$\vec{\Gamma}^1(M) = \begin{bmatrix} \rho''\sin\varphi + \rho'\varphi'\cos\varphi + \rho'\varphi'\cos\varphi + \rho\varphi''\cos\varphi - \rho\varphi'^2\sin\varphi \\ 0 \\ \rho''\cos\varphi - \rho'\varphi'\sin\varphi - \rho'\varphi'\sin\varphi - \rho\varphi''\sin\varphi - \rho\varphi'^2\cos\varphi \end{bmatrix}_{R_1}$$

$$\vec{\Gamma}^1(M) = \begin{bmatrix} \rho''\sin\varphi + 2\rho'\varphi'\cos\varphi + \rho\varphi''\cos\varphi - \rho\varphi'^2\sin\varphi \\ 0 \\ \rho''\cos\varphi - 2\rho'\varphi'\sin\varphi - \rho\varphi''\sin\varphi - \rho\varphi'^2\cos\varphi \end{bmatrix}_{R_1}$$

Calcul de $\vec{\Gamma}_1^i(M)$

$$\vec{V}_1^i(M) = \rho\theta'\sin\varphi\,\overrightarrow{y_1}$$

$$\vec{\Gamma}_1^i(M) = \frac{d^i}{dt}\vec{V}_1^i(M) = \rho\theta'' \sin\varphi\,\overrightarrow{y_1} + \rho\theta' \sin\varphi\,\frac{d^i}{dt}\overrightarrow{y_1}$$

$$\vec{\Gamma}_1^i(M) = \rho\theta'' \sin\varphi\,\overrightarrow{y_1} + \rho\theta' \sin\varphi\,\vec{\Omega}_1^i \wedge \overrightarrow{y_1}$$

$$\vec{\Omega}_1^i = \theta'\overrightarrow{z_1}$$

$$\vec{\Gamma}_1^i(M) = \rho\theta'' \sin\varphi\,\overrightarrow{y_1} + \rho\theta' \sin\varphi\,(\theta'\overrightarrow{z_1} \wedge \overrightarrow{y_1})$$

$$\vec{\Gamma}_1^i(M) = \rho\theta'' \sin\varphi\,\overrightarrow{y_1} - \rho{\theta'}^2 \sin\varphi\,\overrightarrow{x_1}$$

Sachant que

$$\vec{V}^1(M) = (\rho' \sin\varphi + \rho\varphi' \cos\varphi)\overrightarrow{x_1} + (\rho' \cos\varphi - \rho\varphi' \sin\varphi)\overrightarrow{z_1}$$

Calcul de $\overrightarrow{\Gamma_c}(M)$

$$\overrightarrow{\Gamma_c}(M) = 2\vec{\Omega}_1^i \wedge \vec{V}^1(M)$$

$$\overrightarrow{\Gamma_c}(M) = 2\theta'\overrightarrow{z_1} \wedge \big((\rho' \sin\varphi + \rho\varphi' \cos\varphi)\overrightarrow{x_1} + (\rho' \cos\varphi - \rho\varphi' \sin\varphi)\overrightarrow{z_1}\big)$$

$$\overrightarrow{\Gamma_c}(M) = 2\theta'\overrightarrow{z_1} \wedge (\rho' \sin\varphi + \rho\varphi' \cos\varphi)\overrightarrow{x_1}$$

$$\overrightarrow{\Gamma_c}(M) = 2\theta'(\rho' \sin\varphi + \rho\varphi' \cos\varphi)\overrightarrow{y_1}$$

Finalement, on obtient l'expression de $\vec{\Gamma}^i(M)$

$$\vec{\Gamma}^i(M) = \begin{bmatrix} \rho'' \sin\varphi + 2\rho'\varphi' \cos\varphi + \rho\varphi'' \cos\varphi - \rho\varphi'^2 \sin\varphi - \rho{\theta'}^2 \sin\varphi \\ \rho\theta'' \sin\varphi + 2\theta'(\rho' \sin\varphi + \rho\varphi' \cos\varphi) \\ \rho'' \cos\varphi - 2\rho'\varphi' \sin\varphi - \rho\varphi'' \sin\varphi - \rho\varphi'^2 \cos\varphi \end{bmatrix}_{R_1}$$