Série (1) de Travaux Dirigés du Chapitre IV : Cinématique du solide rigide

Exercice 1

On considère un point matériel se déplaçant dans un référentiel (R) $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Les coordonnées du point M dans le référentiel (R) sont données par :

$$x(t) = t + 1\,,\ y(t) = t^2 + 1,\ z(t) = 0. \text{ (t étant le temps)}$$

1) Donner l'équation de la trajectoire de M dans (R). En déduire sa nature.
2) Calculer la vitesse $\vec{V}(M)$ et l'accélération $\vec{\Gamma}(M)$ du point M.

Exercice 2

Soit le système mécanique composé d'une tige OO_2 de longueur L et d'une plaque rectangulaire de dimension 2a et 2b articulée en O_2 avec la tige (voir figure). La plaque tourne autour de la tige à une vitesse angulaire $\dot{\varphi}$.

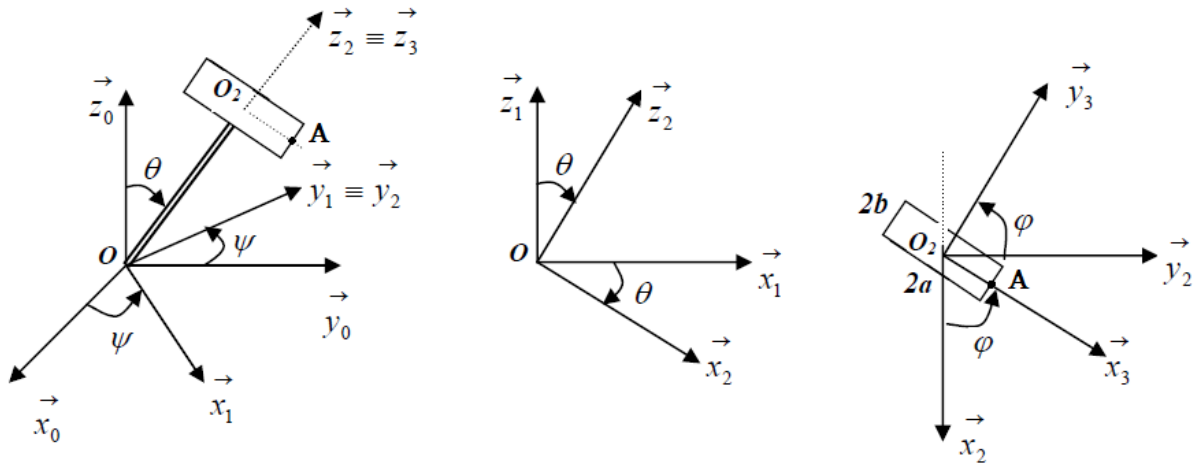
(R_0) $(O, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$ étant le repère fixe ;

(R_1) $(O, \vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$ en rotation autour de $\vec{z_0}$ tel que $(\vec{x_0}, \vec{x_1}) = (\vec{y_0}, \vec{y_1}) = \psi$

(R_2) $(O, \vec{x_2}, \vec{y_2}, \vec{z_2})$ lié à la tige en rotation autour de $\vec{y_1}$ tel que $(\vec{z_1}, \vec{z_2}) = (\vec{x_1}, \vec{x_2}) = \theta$

(R_3) $(O_2, \vec{x_3}, \vec{y_3}, \vec{z_3})$ lié à la plaque en rotation autour de $\vec{z_2}$ tel que $(\vec{x_2}, \vec{x_3}) = (\vec{y_2}, \vec{y_3}) = \varphi$

On donne $\dot{\psi} = cste$, $\dot{\theta} = cste$, $\dot{\varphi} = cste$ (Voir la figure ci-dessous)



1) Déterminer les matrices de passage de (R_1) vers (R_2) et de (R_3) vers (R_2);
2) Déterminer le vecteur rotation instantané de (R_3) par rapport à (R_0) exprimé dans (R_2);
3) Déterminer par dérivation la vitesse $\vec{V}^0(O_2)$ exprimée dans le repère (R_2);
4) Déterminer par la composition des vitesses, la vitesse $\vec{V}^0(A)$ par rapport (R_0) exprimée dans (R_2);

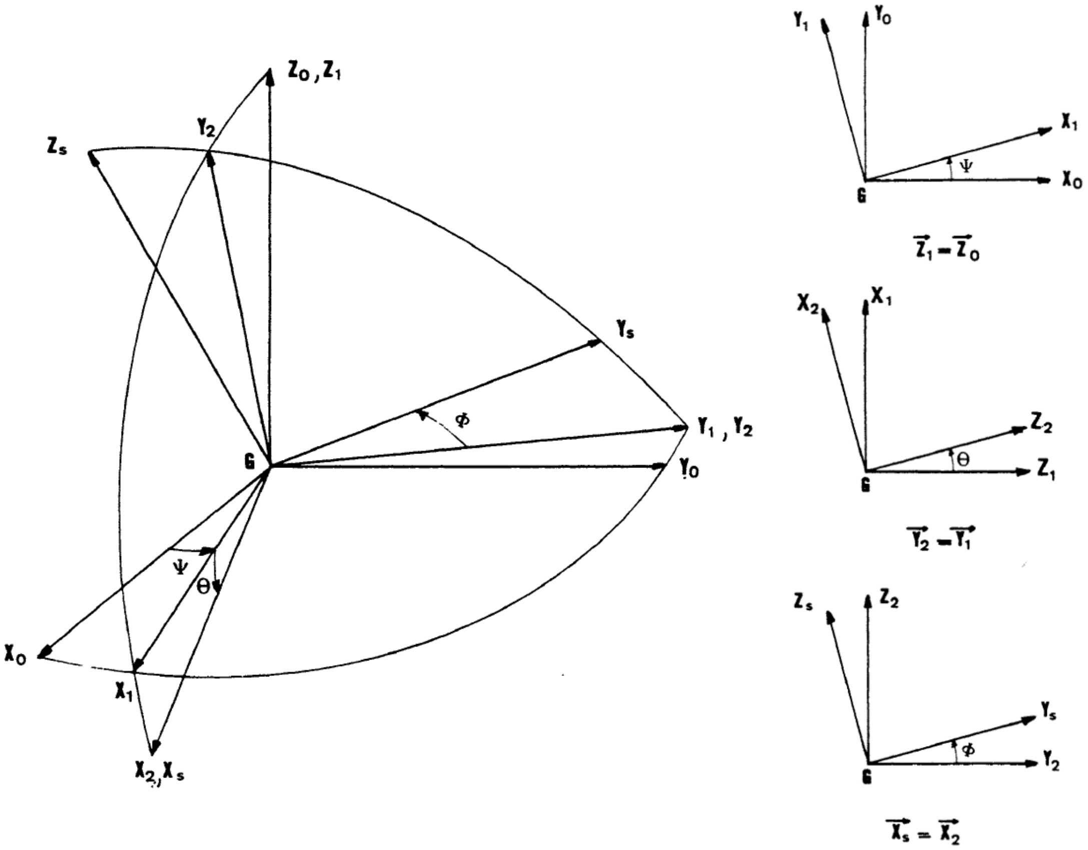
5) Déterminer par dérivation et par la composition des accélérations $\vec{\Gamma}^0(O_2)$ exprimée dans le repère (R_2).

Exercice 3

Dans certains problèmes (gyroscope, mouvement des satellites ...) les angles d'Euler classiques sont inadaptés, on emploie alors les angles ψ, θ, ϕ ainsi définis (Angles d'Euler de type II):

- le plan $(G, \overrightarrow{y_s}, \overrightarrow{z_s})$ coupe le plan $(G, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0})$ suivant une droite que l'on oriente par $\overrightarrow{y_1}$ arbitraire et l'on construit le repère (R_1) tel que :
  - $\overrightarrow{z_1} = \overrightarrow{z_0}$
  - $\overrightarrow{y_1}$: droite d'intersection des plans $(G, \overrightarrow{y_s}, \overrightarrow{z_s})$ et $(G, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0})$définie ci-dessus
  - $\overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{y_1} \wedge \overrightarrow{z_1}$
  - On repère la rotation de (R_1) par rapport à (R_0) par l'angle $(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = \psi$

- On construit (R_2) $(G, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$ tel que
  - $\overrightarrow{x_2} = \overrightarrow{x_s}$
  - $\overrightarrow{y_2} = \overrightarrow{y_1}$
  - $\overrightarrow{z_2} = \overrightarrow{x_2} \wedge \overrightarrow{y_2}$
  - On repère la rotation de (R_2) par rapport à (R_1) par l'angle $(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}) = \theta$
  - On repère la rotation de (R_s) par rapport à (R_2) par l'angle $(\overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{y_s}) = \phi$



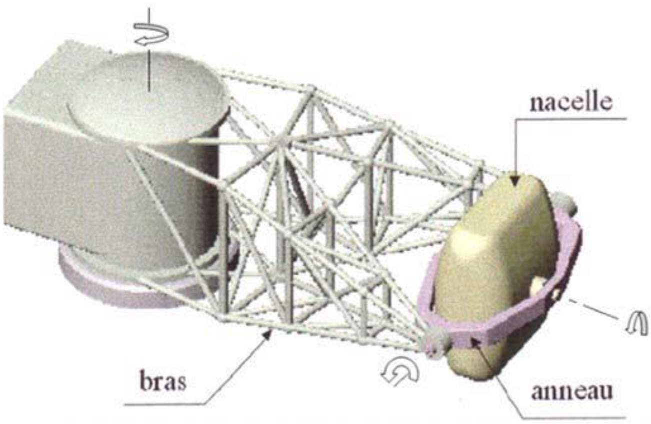
1) Soit $\overrightarrow{W} = (X_i, Y_i, Z_i)_{R_i}$ un vecteur quelconque, écrire les matrices qui permettent de passer des composantes de $\overrightarrow{W}$ dans (R_i) aux composantes de $\overrightarrow{W}$ dans (R_j) pour tous les couples de repères.
2) Calculer $\overrightarrow{\Omega}_0^s$, exprimer ce vecteur dans (R_s)

Exercice 4

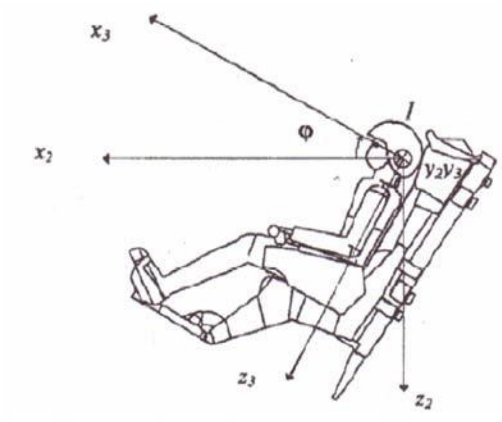
Les performances des avions de combat modernes permettent d'atteindre des niveaux d'accélération très élevés, qui peuvent conduire à la perte de conscience du pilote.

Pour améliorer la résistance humaine aux fortes accélérations, la centrifugeuse constitue un moyen d'essai indispensable pour la recherche médicale afin d'étudier l'effet des fortes accélérations (10 g) sur le corps humain et de développer de nouveaux systèmes (combinaison anti-g, commande vocale, son 3D...). Elles sont utilisées d'autre part pour l'entraînement des pilotes afin d'augmenter par des exercices de contraction musculaire et de respiration leur tolérance aux fortes accélérations.

L'exercice proposé ici s'articule autour d'une présentation du moyen d'essai le plus récent, la centrifugeuse 101.3 du Centre d'Essais en Vol de Brétigny/Orge (France), une étude cinématique permet de valider l'utilisation de cette centrifugeuse pour simuler les accélérations effectivement subies par le pilote dans son avion.



Centrifugeuse



Détail de la position du pilote dans la nacelle

C'est l'accélération ressentie au niveau de la tête du pilote qui est le paramètre important pour l'étude des phénomènes physiologiques. Pour simplifier les lois de commande de la centrifugeuse, on installe donc le siège pilote dans la nacelle de telle façon que le point I, centre de la tête du pilote se trouve aligné sur les axes de rotation des deux liaisons pivot bras / anneau et anneau / nacelle.

Soient :

(R_0) $(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ le repère lié au bâti (S_0)

(R_1) $(O, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$ le repère lié au bras (S_1) tel que $(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = (\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_1}) = \psi$

(R_2) $(I, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$ le repère lié à (S_2) tel que $(\overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{y_2}) = (\overrightarrow{z_1}, \overrightarrow{z_2}) = \theta$ avec $\|\overrightarrow{OI}\| = R$

(R_3) $(I, \overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$ le repère lié à (S_3) tel que $(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_3}) = (\overrightarrow{z_2}, \overrightarrow{z_3}) = \varphi$

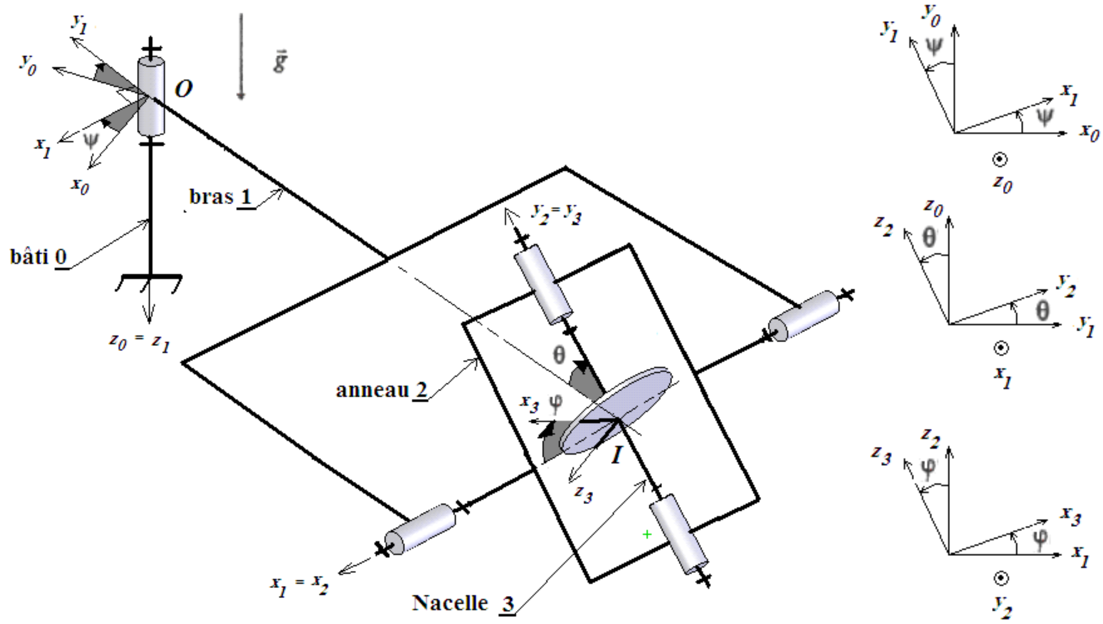


Schéma cinématique de la centrifugeuse

1) Déterminer les torseurs cinématiques (torseurs des vitesses) suivants

   a. $\{V_1^0\}_0 = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_1^0} \\ \overrightarrow{V^0}(O \in S_1) \end{Bmatrix}_0$

   b. $\{V_2^1\}_1 = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_2^1} \\ \overrightarrow{V^1}(I \in S_2) \end{Bmatrix}_1$

   c. $\{V_3^2\}_1 = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_3^2} \\ \overrightarrow{V^2}(I \in S_3) \end{Bmatrix}_1$

2) En déduire $\{V_3^0\}_1 = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_3^0} \\ \overrightarrow{V^0}(I \in S_3) \end{Bmatrix}_1$

3) Calculer le vecteur accélération $\overrightarrow{\Gamma^0}(I \in S_3)$ exprimé dans (R_1)

4) Soit $\vec{G} = \vec{g} - \overrightarrow{\Gamma^0}(I \in S_3)$ le vecteur qui représente le nombre de « g » qui s'applique sur le pilote en I au cours de l'exercice. L'accélération de la pesanteur est telle que: $\vec{g} = g\overrightarrow{z_0}$.

   Déterminer les trois composantes G_{x3}, G_{y3}, G_{z3} de G dans la base du repère (R_3) lié à la nacelle.

5) Calculer en fonction de R, g et $\dot{\psi}$ l'inclinaison θ de l'anneau pour que l'accélération latérale G_{y3} « ressentie » par le pilote reste nulle.